

Разработка алгоритмов раскачки и стабилизации обратного маятника, закрепленного на валу двигателя

Эмирбеков Н.Э., Эмирбеков М.Э.
ФГБОУ ВПО НГТУ, Новосибирск, Россия

Аннотация: Данная статья посвящена разработке алгоритмов раскачки и стабилизации обратного маятника, закрепленного на валу двигателя. Показывается описание математической модели объекта, приводятся нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие его поведение. Осуществляется переход к линеаризованной модели, для которой проводится исследование основных качественных свойств. Предлагается алгоритм раскачки маятника из устойчивого положения в область точки неустойчивого равновесия. Разрабатывается алгоритм стабилизации, позволяющий обеспечить требуемое качество переходного процесса в системе. Проводится моделирование замкнутой системы в программной среде Matlab Simulink.

Ключевые слова: обратный маятник, раскачка, стабилизация, регулятор.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема раскачки и стабилизации объекта управления «обратный маятник» предполагает решение ряда достаточно сложных задач. Их можно условно разделить на два класса. Первый включает в себя задачи, носящие выраженный исследовательский характер. К ним относится анализ достоинств и недостатков уже известных подходов к синтезу системы стабилизации [1-7], позволяющих реализовать в системе процессы заданного качества, моделирования замкнутой системы и анализ полученных результатов. Второй класс задач связан с технической реализацией системы управления, разработку программного обеспечения, отладочных средств. Особенностью данной работы является то, что здесь рассмотрена система с переменной структурой, то есть в зависимости от параметров объекта управления алгоритм управления изменяется. Задача стабилизации объекта управления «обратный маятник» является актуальной и может иметь достаточно широкие области применения. Данный алгоритм стабилизации может быть применен в робототехнике при движении роботогуманоидов [8-9]. С помощью двигателей

изменяется угол расположения составных частей робота, что позволяет сохранить его точку равновесия и не дает ему упасть.

Обсуждаемый объект управления представляет собой однородный стержень, закрепленный на валу двигателя, который управляет его движением при помощи прикладываемой силы. Схематическое представление системы «обратный маятник, закрепленный на валу двигателя» представлено на Рис.1.

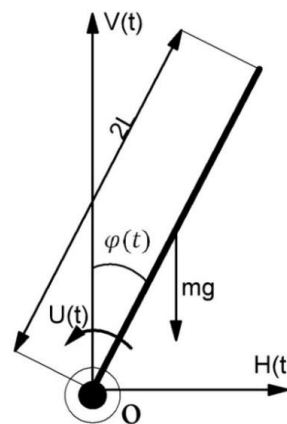


Рис. 1. Система «обратный маятник, закрепленный на валу двигателя»

Здесь $\varphi(t)$ – угол отклонения маятника от вертикали (выходная переменная), $U(t)$ – момент прикладываемой силы (выходная переменная), m – масса маятника, $2L$ – длина маятника, g – ускорение силы тяжести, $H(t)$ и $V(t)$ – горизонтальная и вертикальная силы реакции у оси маятника.

1. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ «ОБРАТНЫЙ МАЯТНИК» И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Модель объекта «обратный маятник» можно получить с помощью уравнений второго закона Ньютона [10]:

$$J \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) = LV(t) - LH(t) \cdot \cos \varphi(t) + U(t) \quad (1)$$

Для объекта справедливы вспомогательные уравнения:

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2} (L \cdot \sin\varphi(t)) = H(t) \\ m \frac{d^2}{dt^2} (L \cdot \cos\varphi(t)) = V(t) - mg \end{cases} \quad (2)$$

Здесь J – момент инерции маятника, который рассчитывается по формуле:

$$J = \frac{mL^2}{12} \quad (3)$$

Уравнения (2) можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} mL\ddot{\varphi}(t) \cdot \cos\varphi(t) - \\ -mL\dot{\varphi}^2(t) \cdot \sin\varphi(t) = H(t), \\ -mL\ddot{\varphi}(t) \cdot \sin\varphi(t) - mL\dot{\varphi}^2(t) \cdot \\ \cdot \cos\varphi(t) = V(t) - mg. \end{cases} \quad (4)$$

Подставим уравнения (4) в уравнения (1) и выполним некоторые преобразования. В результате получим нелинейное дифференциальное уравнение, которое описывает поведение системы «обратный маятник, закрепленный на валу двигателя»:

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{g}{L'} \sin\varphi(t) + \frac{1}{mL'} U(t), \quad (5)$$

где L' – эффективная длина маятника [10], которая рассчитывается по формуле:

$$L' = \frac{J + mL^2}{mL},$$

Задачу синтеза, которую необходимо решить для данного объекта, можно разделить на два этапа:

1. Раскачка маятника из положения устойчивого равновесия до приближения угла маятника к возможности стабилизации его в положении неустойчивого равновесия, при ограниченном управляющем воздействии.

2. Приведение угла отклонения маятника от вертикали к нулевому значению.

Формально задача синтеза для данного объекта, как для объекта с переменной структурой, записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi(0) = \pi \Rightarrow \varphi(t) = [-\varphi; \varphi], \text{ где } \varphi = 5^\circ \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

при выполнении требований по быстродействию к переходному процессу в системе $t_{\text{п}} \leq t_{\text{п}}^*$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ ПО ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ

Перед выбором алгоритма стабилизации системы «обратный маятник» необходимо проверить, что задача синтеза в постановке (6) будет иметь решение.

Для этого необходимо перейти к линеаризованной модели объекта.

Допустим, что угол отклонения маятника от вертикали изменяется в диапазоне $-5^\circ \leq \varphi \leq 5^\circ$, и разложим $\sin\varphi(t)$ в ряд Тейлора с подстановкой только первого члена ряда разложения [11]:

$$\sin\varphi(t) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3} + \dots \approx \varphi. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), получим линеаризованное дифференциальное уравнение, которое описывает поведение объекта управления в рабочей точке.

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{g}{L'} \varphi(t) + \frac{1}{mL'} U(t). \quad (8)$$

Перейдем к описанию модели объекта в переменных состояния. В качестве компонент вектора состояния выберем угол отклонения маятника от вертикали и его первую производную:

$$x_1 = \varphi(t), \quad x_2 = \dot{\varphi}(t). \quad (9)$$

В результате уравнения состояния примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{g}{L'} x_1 + \frac{1}{mL'} U, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (10)$$

Структурная схема объекта управления «обратный маятник», соответствующая системе уравнений (10), представлена на Рис. 2.

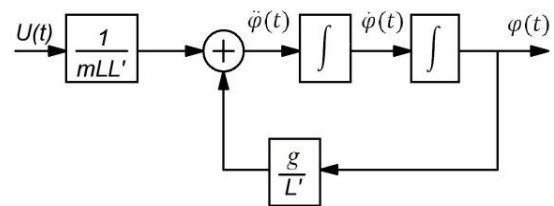


Рис. 2. Структурная схема системы «обратный маятник»

Найдем множество равновесных состояний системы, для чего приравняем производные правой части (10) к нулю.

$$\begin{cases} 0 = x_2, \\ 0 = \frac{g}{L'} x_1 + \frac{1}{mL'} U. \end{cases} \quad (11)$$

Решив уравнения относительно неизвестных, получим:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = -\frac{1}{mgL} U. \end{cases} \quad (12)$$

При управлении $U=0$, для координат x_1 и x_2 точкой равновесия является 0.

Таким образом, для модели объекта (10) задача стабилизации угла маятника в 0 разрешима, т.к. это точка принадлежит к множеству равновесных состояний объекта [12].

Запишем матрицу A – собственных свойств, B – вектор управляющих воздействии и C – вектор выхода модели объекта (10):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L'} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mLL'} \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

Устойчивость системы можно определить по собственным числам матрицы A :

$$\det(pI - A) = 0, \quad (13)$$

где p – оператор дифференцирования, I – единичная диагональная матрица 2×2 .

Собственные числа принимают значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{L'}} \quad (14)$$

Объект неустойчив, т.к. одно из собственных чисел имеет положительную вещественную часть [12].

В условия разрешимости задачи синтеза также входят анализ управляемости и наблюдаемости объекта управления.

Из [12] известно, что n -мерный объект управляем тогда и только тогда, когда матрица управляемости:

$$U = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) \quad (15)$$

имеет полный ранг. Так как объект одноканальный, то критерий управляемости принимает вид:

$$\det U \neq 0.$$

Матрица управляемости объекта имеет вид:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{mLL'} \\ \frac{1}{mLL'} & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Очевидно, что определитель матрицы U ненулевой, из этого следует, что объект является полностью управляемым.

Из [12] известно, что n -мерный объект наблюдаем тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

имеет полный ранг, то есть, для одноканального объекта:

$$\det N \neq 0$$

Матрица наблюдаемости имеет следующий вид:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Очевидно, что определитель матрицы N ненулевой, из этого следует, что объект является полностью наблюдаемым.

Из исследования математической модели системы следует, что объект наблюдаем, управляем и имеет реализуемое состояние равновесия. Таким образом, задача синтеза является разрешимой, можно переходить к разработке алгоритмов раскочки и стабилизации.

3. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ РАСКОЧКИ И СТАБИЛИЗАЦИИ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ «ОБРАТНЫЙ МАЯТНИК»

Т.к. в постановке задачи синтеза (5), угол отклонения маятника изменяется в диапазоне $-5^\circ \leq \varphi \leq 5^\circ$, предложен алгоритм раскочки маятника из устойчивого положения равновесия до диапазона углов, в котором возможна стабилизация в положении неустойчивого равновесия. Блок схема алгоритма раскочки представлена на Рис. 3.

Для решения второй части задачи, то есть для стабилизации маятника, предложено использовать метод синтеза, который обеспечивает заданную реакцию системы на начальные условия, то есть модальный метод [10, 12].

Описание объекта управления в переменных состояниях (10) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 U, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{g}{L'}, a_2 = \frac{1}{mLL'}.$$

Метод синтеза предполагает организацию следующего закона управления:

$$U = -Kx \Rightarrow U = -k_1 x_1 - k_2 x_2, \quad (20)$$

где K – вектор коэффициентов регулятора, который нужно рассчитать.

Подставляя (20) в (19), получим описание замкнутой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = (a_1 - a_2 k_1) \cdot x_1 - a_2 k_2 x_2, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (21)$$

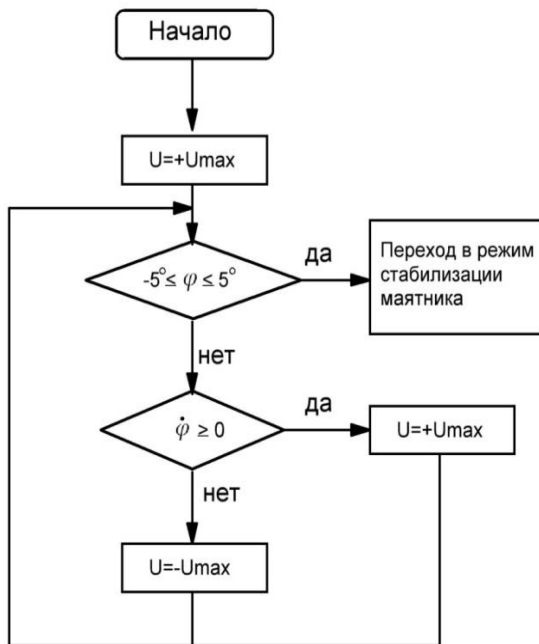


Рис.3 Блок схема алгоритма раскачки «обратного маятника»

Запишем характеристическое уравнение системы (21):

$$A(p) = p^2 - a_2 k_2 p - (a_1 + a_2 k_1) = 0. \quad (22)$$

По требованиям к качеству работы системы формируется желаемое уравнение:

$$C(p) = (p - \lambda_1) \cdot (p - \lambda_2) = p^2 + c_2 p + c_1. \quad (23)$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях характеристического уравнения (22) и желаемого уравнения (23), получим соотношения для расчета параметров регулятора:

$$\begin{cases} -(a_1 + a_2 k_1) = c_1, \\ -a_2 k_2 = c_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{c_1 + a_1}{a_2}, \\ k_2 = -\frac{c_2}{a_2}. \end{cases} \quad (24)$$

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР РАСЧЕТА И РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

В Табл. 1 представлены численные значения объекта управления «обратный маятник».

Требование к качеству переходного процесса следующее:

$$t_{\text{п}} \leq 1 \text{ с.}$$

На Рис. 4 представлена структурная схема замкнутой системы.

Таблица 1

Параметр	Значение	Единица измерения
m , масса маятника	0,05	кг
L , половина длины маятника	0,05	м
g , ускорение силы тяжести	9,81	м/с ²
L' , эффективная длина маятника	0,054	м
J , момент инерции маятника	$1.04 \cdot 10^{-6}$	кг · м

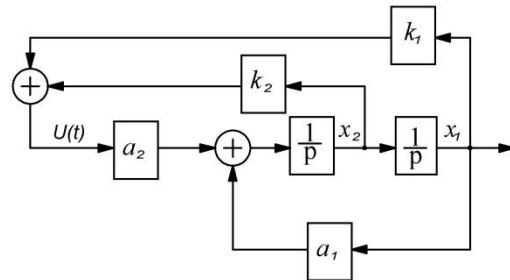


Рис.4 Структурная схема замкнутой системы с регулятором

Рассчитанные параметры объекта и регулятора следующие:

$$a_1 = 181.67, \quad a_2 = 7407.40,$$

$$k_1 = -0.0256, \quad k_2 = -0.0022$$

На Рис. 5 представлены переходные процессы в системе стабилизации при следующих начальных углах отклонения маятника от вертикали:

$$\begin{aligned} \varphi_{01} &= 0.122 \text{ рад}; \quad \varphi_{02} = 0.087 \text{ рад}; \\ \varphi_{03} &= 0.052 \text{ рад}; \end{aligned}$$

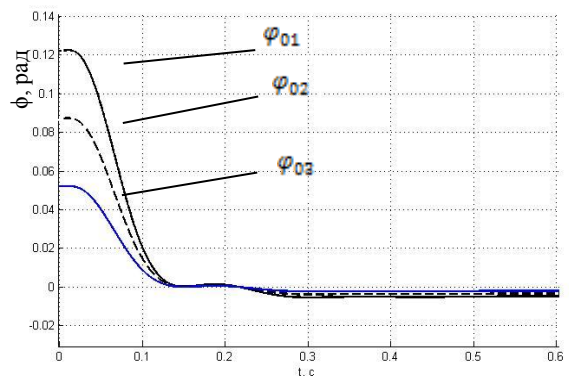


Рис. 5 Переходные процессы в системе с регулятором

На Рис. 6 представлены переходные процессы в системе стабилизации при следующих начальных углах отклонения маятника от вертикали:

$$\begin{aligned} \varphi_{01} &= -0.122 \text{ рад}; \quad \varphi_{02} = -0.087 \text{ рад}; \\ \varphi_{03} &= -0.052 \text{ рад}; \end{aligned}$$

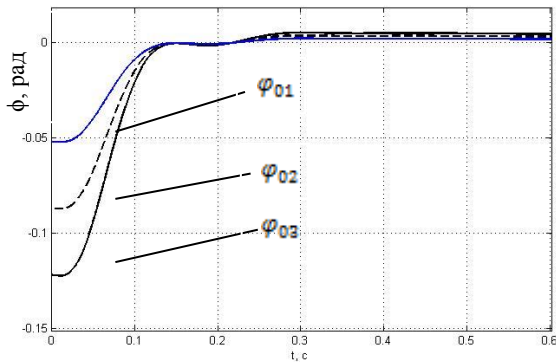


Рис.6. Переходные процессы в системе с регулятором

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье была рассмотрена задача стабилизации модельной системы «обратный маятник, закрепленный на валу двигателя». Приведены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие динамику данного объекта, и сформулированы задачи синтеза. Осуществлен переход к линеаризованной модели, для которой проведен анализ ее качественных свойств. Предложен алгоритм раскачки обратного маятника из устойчивого положения в окрестность точки неустойчивого равновесия. Также предложен алгоритм стабилизации системы на основе модального метода синтеза. Приведены результаты моделирования замкнутой системы в среде MatLab Simulink, которые подтверждают, что в замкнутой системе с регулятором удастся добиться процессов заданного качества.

В дальнейшей работе планируется разработать учебный стенд «обратный маятник, закрепленный на валу двигателя» на базе микроконтроллера Arduino Mega 2560.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 232 с.
- [2] Дружинина О.В. и др. Моделирование и построение алгоритма стабилизации перевернутого маятника. Динамика сложных систем -XXI век. 2012. № 4. с. 74-78.
- [3] Саблина Г.В., Дроздова О.Н. Исследование и синтез системы «двойной перевернутый маятник на тележке». Матер. VIII международной н.-т. конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП)». Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2006, Т7, с. 249-252.
- [4] Nishida M., Kaneshide A., Terashima K. Control system of nonlinear process to swing up and stabilize inverted pendulum. Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers, № 9, 1995, Vol. 31, p. 1452-1461.
- [5] Андриевский Б.Р., Гузенко П.Ю., Фрадков А.Л. Управление нелинейными колебаниями

механических систем методом скоростного градиента. Автоматика и Телемеханика. М: Наука, 1996.

- [6] Саблина Г.В. Разработка и исследование методики стабилизации объекта управления «каретка-маятник»: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Новосибирск. 2000.
- [7] Саблина Г.В., Сажин А.И. Исследование реального скользящего режима в модельной системе «перевернутый маятник». Автоматика и программная инженерия. 2015, №1(11), с. 9–15
- [8] Hemani H., Golliday C. The inverted pendulum and biped stability. Math. Biosci, 34, 1977, p. 95-110.
- [9] Kieffer J., Bale R. Walking viability and gain synthesis for novel class dynamically-simple biped walking machines. Informatica, 17, 1993, p. 145-155.
- [10] Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М: Мир, 1977. 653 с.
- [11] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., исправленное. М.: Наука, 1986.
- [12] Востриков А.С., Французова Г.А., Гаврилов Е.Б. Теория автоматического регулирования: Учеб. пособие. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2008. 476 с.



Эмирбеков Нурбек Эмирбекович,
магистрант каф. Автоматики НГТУ
email: wolf_2011@mail.ru



Эмирбеков Мирбек Эмирбекович,
магистрант каф. Автоматики НГТУ
email: wolf_2011@mail.ru

Design of swing and stabilization algorithms of the inverse pendulum fixed on a motor shaft

Nurbek Emirbekov, Mirbek Emirbekov

Abstract. In this paper, the task of swing and stabilization of the inverse pendulum fixed on a motor shaft is considered. The nonlinear differential equations describing this system behavior are given and transition to its linearized model is performed. The swing algorithm of the pendulum from stable position to area of a point of an unstable equilibrium is offered. The stabilization algorithm allowing to ensure demanded quality of transient in system is developed. Simulation of the closed system with the controller in Matlab Simulink program environment is spent.

Key words: inverse pendulum, swing, stabilization, controller.

REFERENCES

- [1] Formal'skij A.M. Upravlenie dvizheniem neustojchivyh ob'ektov. M.: FIZMATLIT, 2012. 232 s.

- [2] Druzhinina O.V. i dr. Modelirovanie i postroenie algoritma stabilizacii perevernutoho majatnika. Dinamika slozhnyh sistem -XXI vek. 2012. № 4. s. 74-78.
- [3] Sablina G.V., Drozdova O.N. Issledovanie i sintez sistemy «dvojnoj perevernutyj majatnik na telezhke». Mater. VIII mezhdunarodnoj n.-t. konferencii «Aktual'nye problemy jelektronogo priborostroenija (APJeP)». Novosibirsk, Izd-vo NGTU, 2006, T7, s. 249-252.
- [4] Nishida M., Kaneshide A., Terashima K. Control system of nonlinear process to swing up and stabilize inverted pendulum. Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers, № 9, 1995, Vol. 31, p. 1452-1461.
- [5] Andrievskij B.R., Guzenko P.Ju., Fradkov A.L. Upravlenie nelinejnymi kolebanijami mehanicheskikh sistem metodom skorostnogo gradienta. Avtomatika i Telemehanika. M: Nauka, 1996.
- [6] Sablina G.V. Razrabotka i issledovanie metodiki stabilizacii ob#ekta upravlenija «karetko-majatnik»: Avtoref. dis. ... kand. tehn. nauk. – Novosibirsk. 2000.
- [7] Sablina G.V., Sazhin A.I. Issledovanie real'nogo skol'zjashhego rezhima v model'noj sisteme «perevernutyj majatnik». Avtomatika i programmaja inzherenija. 2015, №1(11), s. 9–15
- [8] Hemani H., Golliday C. The inverted pendulum and biped stability. Math. Biosci, 34, 1977, p. 95-110.
- [9] Kieffer J., Bale R. Walking viability and gain synthesis for novel class dynamically-simple biped walking machines. Informatica, 17, 1993, p. 145-155.
- [10] Kvakernaak X., Sivan R. Linejnye optimal'nye sistemy upravlenija. M: Mir, 1977. 653 s.
- [11] Bronshtejn I.N., Semendjaev K.A. Spravochnik po matema-tike dlja inzhenerov i uchashhihsja vtuzov.- 13-e izd., ispravlennoe. - M.: Nauka, 1986.
- [12] Vostrikov A.S., Francuzova G.A., Gavrilov E.B. Teorija avtomaticheskogo regulirovanija: Ucheb. posobie. Novosibirsk, Izd-vo NGTU, 2008. 476 s.