

# Вейвлет-фильтрация с двухпараметрическими пороговыми функциями: выбор функции и оценивание оптимальных параметров

Ю.Е. Воскобойников

**Аннотация:** В работе рассматривается оптимизация алгоритмов вейвлет-фильтрации с двухпараметрическими пороговыми функциями. Оптимизация алгоритмов вейвлет-фильтрации выполняется в двух направлениях: а) оптимизация за счет выбора наилучшей пороговой функции из используемых на практике функций; б) оптимизация путем оценивания оптимальных параметров наилучшей пороговой функции.

**Ключевые слова:** оценивание, вейвлет-преобразование, фильтрация

## ВВЕДЕНИЕ

Фильтрация в базисе вейвлет-функций (также как и Фурье-фильтрация) включает три этапа:

- вычисление прямого дискретного вейвлет-преобразования (нахождение коэффициентов разложения по зашумленным значениям дискретного сигнала);
- обработка «зашумленных» коэффициентов разложения;
- вычисление обратного дискретного вейвлет-преобразования (нахождение «сглаженных» значений дискретной функции).

Совокупность этих трех этапов принято называть *вейвлет-фильтрацией*. Очевидно, что качество фильтрации зашумленного сигнала определяется алгоритмами обработки, используемыми на втором этапе. Большинство применяемых на практике алгоритмов несут пороговый характер: коэффициент разложения меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины зануляется, в противном случае коэффициент сохраняется или подвергается некоторому (в общем случае нелинейному) преобразованию. Распространение на практике получили «жесткая» и «мягкая» пороговые функции, зависящие только от одного параметра –

величина порога. При этом выбор пороговой величины существенно влияет на ошибку фильтрации и эта величина, по сути, является управляющим параметром алгоритмов вейвлет – фильтрации [1-4].

Однопараметрические пороговые функции имеют известные недостатки (обсуждаемые ниже). В значительной степени эти недостатки преодолеваются при использовании двухпараметрических пороговых функций, зависящих уже от двух параметров. Наличие двух параметров ставит с особой остротой вопрос о вычислении оптимальных значений этих параметров, минимизирующих ошибку фильтрации. Однако отсутствие в литературе аргументированных и приемлемых (по точности фильтрации) алгоритмов выбора этих параметров объясняет слабое использование двухпараметрических пороговых функций на практике.

Данная работа посвящена оптимизации алгоритмов вейвлет-фильтрации с двухпараметрическими пороговыми функциями в двух аспектах:

- оптимизации за счет выбора наилучшей пороговой функции;
  - оптимизации путем оценивания оптимальных параметров пороговой функции.
- Заметим, что в рамках второго аспекта полученные результаты являются обобщением результатов работы, полученных для одной двухпараметрической функции [5].

**Двухпараметрические пороговые функции алгоритмов вейвлет – фильтрации.** Кратко приведем основные понятия и определения, необходимые для изложения результатов работы.

Многомасштабное (*multiresolution*) представление функции  $f(t)$  в базисе вейвлет-функции имеет вид [6]:

$$\hat{f}(t) = \sum_k a_{j_0+J,k} \varphi_{J,k}(t) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (1)$$

Функции  $\{\varphi_{j,k}(t)\}$  называют масштабирующими (или отцовскими), а функции

$\{\psi_{j,k}(t)\}$  – вейвлет – функциями (или материнскими). Коэффициенты разложения

$a_{j,k}$  называют аппроксимирующими,  $d_{j,k}$  - детализирующими и они определяются

$$a_{j,k} = \int_R f(t)\varphi_{j,k}(t)dt, \quad d_{j,k} = \int_R f(t)\psi_{j,k}(t)dt, \quad (2)$$

где  $R$  – интервал определения функции  $f(t)$ . Переменная  $j$  характеризует уровень разложения и ее часто называют коэффициентом масштаба, а переменная  $k$  – временной сдвиг той или иной базисной функции. Системы функций  $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ ,  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  составляют ортогональный базис пространств вейвлет – функций (подробнее см. [3,4]). Заметим, что чем меньше номер  $j$ , тем более «мелкие» структуры исходной функции  $f(t)$  могут быть представлены в базисах  $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ ,  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  и тем ближе реконструированный сигнал  $\hat{f}(t)$  к исходному.

Теоретической основой пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации является следующая предпосылка: уровень коэффициентов разложения случайных ошибок исходных сравнительно мал по сравнению с коэффициентами разложения точного сигнала, что позволяет распознать две ситуации: «шумовой» коэффициент (в основном обусловлен шумом измерения) и «информативный» коэффициент (в основном определяется значениями точного сигнала). Таким образом, для успешной фильтрации необходимо обратить в ноль шумовые коэффициенты, сохранив при этом информативные коэффициенты разложения. Эта идея реализуется пороговыми алгоритмами обработки «зашумленных» коэффициентов разложения.

На практике широко используются две пороговые функции:

выражениями:

- «жесткая» пороговая функция вида:
 
$$T_H(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda; \\ \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda \end{cases} \quad (3)$$

- «мягкая» пороговая функция вида:
 
$$T_S(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda, \\ \text{sign}(\tilde{d}) \cdot [|\tilde{d}| - \lambda], & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda; \end{cases} \quad (4)$$

где  $\lambda$  – величина порога,  $\tilde{d}$  – обрабатываемый коэффициент разложения (как правило – это детализирующие коэффициенты, относительная погрешность которых на порядок и более выше, чем у аппроксимирующих коэффициентов (см. [4], стр. 58-60). Графики функций (3), (4) приведены на рис. 1 для  $\lambda = 1$  (1 – график функции (3), 2 – функция (4)).

Отметим характерные особенности этих функций:

- из-за уменьшения амплитуды коэффициента разложения на величину  $\lambda$  в функции  $T_S(\tilde{d}, \lambda)$  возможно сглаживание (размытие) контрастных элементов обрабатываемого сигнала, особенно при больших значениях  $\lambda$ ;

- наличие в функции  $T_H(\tilde{d}, \lambda)$  разрыва в окрестности  $\lambda$  может вызвать появление осцилляций (эффект Гиббса) в «особых» точках обрабатываемого сигнала.

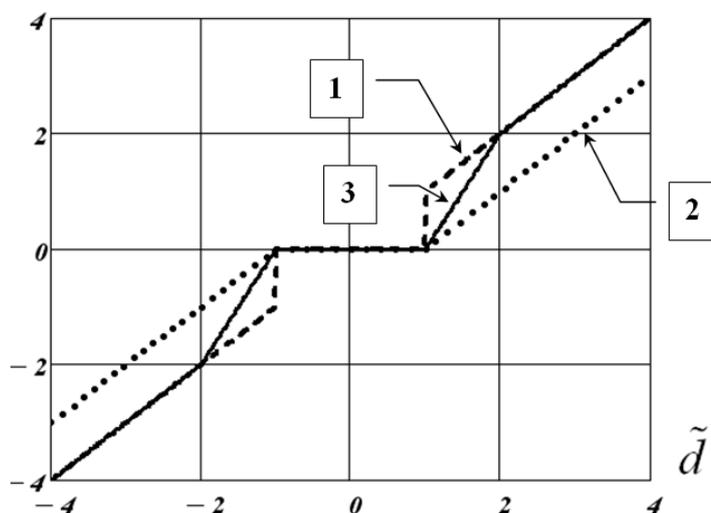


Рис. 1. Графики пороговых функций (3), (4), (5)

Для преодоления этих недостатков в литературе были предложены *двухпараметрические функции*, которые сейчас будут рассмотрены.

1. Пороговая функция  $T_{SS}(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2)$  [7] (обозначаемая в зарубежной литературе как *semisoft* или *firm*) вида:

$$T_{SS}(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda_1; \\ \text{sign}(\tilde{d}) \frac{\lambda_2 (|\tilde{d}| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \text{если } \lambda_1 < |\tilde{d}| \leq \lambda_2, \\ \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda_2, \end{cases} \quad (5)$$

которая включает уже две пороговые величины  $\lambda_1, \lambda_2$ . График этой функции (при  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ ) приведен на рис. 1 (кривая 3). В работе [7] были исследованы статистические характеристики ошибок фильтрации для трех пороговых функций (3), (4), (5). Было показано (аналитически и в вычислительном

эксперименте), что функция (3) имеет наименьшее смещение, функция (4) – наименьшую дисперсию, функция (5) – наименьшую СКО фильтрации.

2. Пороговая функция  $T_Z(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2)$  [8], определяемая выражением:

$$T_Z(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda_1; \\ \frac{\tilde{d}}{e-1} \cdot \left( e^{\frac{|\tilde{d}| - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} - 1 \right), & \text{если } \lambda_1 < |\tilde{d}| \leq \lambda_2, \\ \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda_2, \end{cases} \quad (6)$$

На рис. 2 представлены графики функции (6) (кривая 1) и функции (5) (кривая 2), построенные при  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ . Видно, что на

интервале  $[\lambda_1, \lambda_2]$  функция (6) отличается от прямой (которая присутствует в функции (5)).

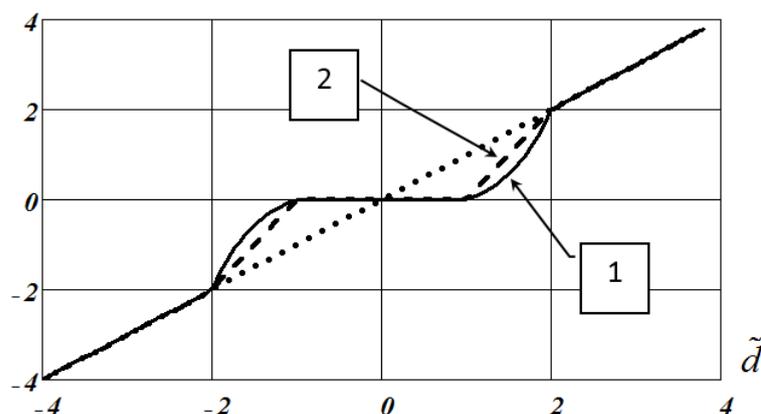


Рис. 2. Графики пороговых функций (5), (6)

3. Комбинированная пороговая функция  $T_{COM}(\tilde{d}, \lambda, \alpha)$  [9], определяемая выражением:

$$T_{COM}(\tilde{d}, \lambda, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda; \\ (1 - \mu)T_H(\tilde{d}, \lambda) + \mu T_S(\tilde{d}, \lambda), & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\mu = \alpha \left( \frac{|\tilde{d}| - \lambda}{\lambda} \right)^2$ . Эта пороговая функция есть линейная комбинация «жесткой» и «мягкой» пороговых функций и она также

включает два параметра  $\lambda, \alpha$ , при этом  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Очевидно, что при  $\alpha = 0$  значение  $\mu = 0$  и

$T_{COM}(\tilde{d}, \lambda, 0) = T_H(\tilde{d}, \lambda)$ . Если  $\alpha = 1$ , то  $\mu = 1$  и  $T_{COM}(\tilde{d}, \lambda, 1) = T_S(\tilde{d}, \lambda)$ . На рис. 3 приведены графики функции  $T_{COM}(\tilde{d}, 3, \alpha)$  при различных значениях параметра  $\alpha$ : кривая 1 -  $\alpha = 0.001$ ; кривая

2 -  $\alpha = 0.5$ ; кривая 3 -  $\alpha = 0.99$ . Эти кривые хорошо иллюстрируют изменение пороговой функции при вариации параметра  $\alpha$ .

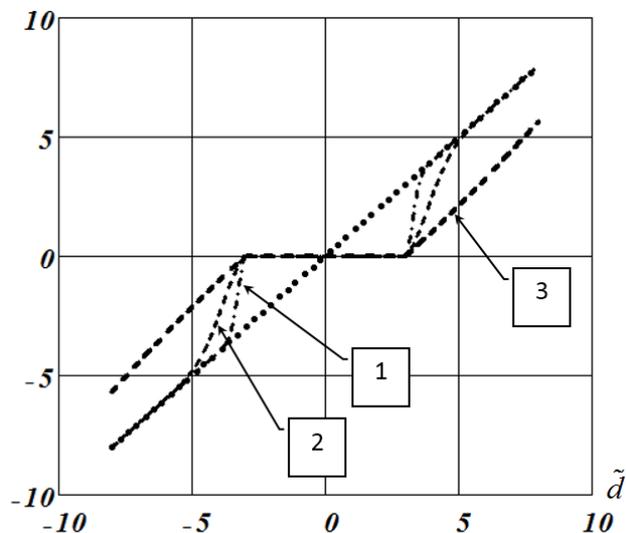


Рис. 3. Графики пороговой функции (7) при разных значениях параметра  $\alpha$

Очевидно, что различное поведение этих функций обуславливает разную ошибку алгоритмов вейвлет-фильтрации с использованием двухпараметрических пороговых функций. Возникает нетривиальный вопрос: *какая из трех приведенных выше пороговых функций имеет меньшую ошибку фильтрации?* Ответ на этот вопрос позволил бы рекомендовать эту функцию для использования на практике и перейти к оценке оптимальных параметров этой функции.

**Выбор наилучшей пороговой функции.** К сожалению, в литературе (как в отечественной,

так и в зарубежной) отсутствуют аналитические или экспериментальные сравнения по точности фильтрации этих пороговых функций. Поэтому ответ на поставленный вопрос дадим из анализа результатов выполненного вычислительного эксперимента.

В качестве тестовых функций использовались две функции, часто применяемых в зарубежных исследованиях и значения которых  $f_i, i = 1, 2, \dots, 2048$ , представлены на рис. 4 (назовем тест-функция 1) и на рис. 5 (тест-функция 2).

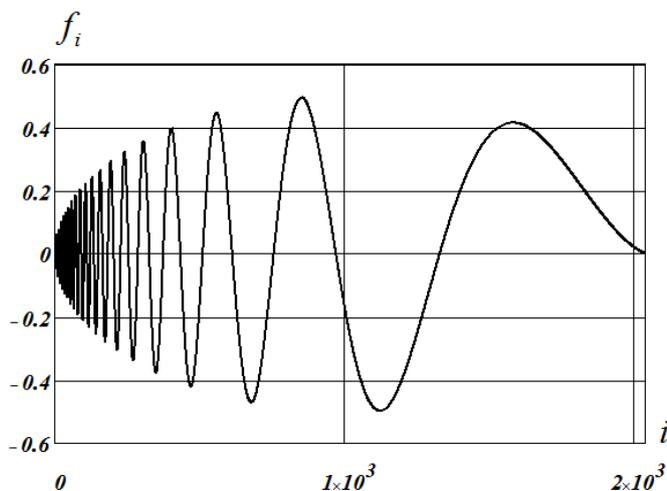


Рис. 4. График значений тест-функции 1

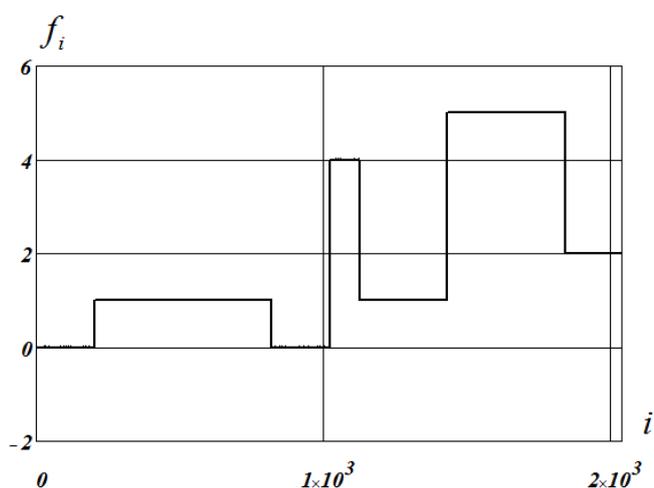


Рис. 5. График значений тест-функции 2

Исходные («зашумленные») данные формировались как

$$\tilde{f}_i = f_i + \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2048,$$

где  $f_i$  - «точные» значения тестовой функции,  $\eta_i$  - псевдослучайные числа (шум измерения), подчиняющиеся нормальному распределению с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Значения дисперсии задавалось через относительный

уровень  $\delta_\eta = \frac{\|\eta\|}{\|f\|}$  шума измерения, где

$\|\eta\|, \|f\|$  - евклидовы нормы соответствующих векторов. Точность вейвлет-фильтрации определялась величиной относительной ошибки:

$$\delta_f(T) = \frac{\|\hat{f}(T) - f\|}{\|f\|}, \quad (8)$$

где  $\hat{f}(T)$  - вектор - результат вейвлет-фильтрации с пороговой функцией  $T$ . Очевидно, что  $\delta_f(T)$  является случайной величиной и поэтому по выборке вычислялась выборочная оценка математического ожидания этой случайной величины:

$$\bar{\delta}_f(T) = \frac{1}{N_s} \cdot \sum_{l=1}^{N_s} \delta_f^{(l)}(T), \quad (9)$$

где  $N_s = 30$  - объем выборки,  $\delta_f^{(l)}(T)$  - относительная ошибка фильтрации  $l$ -ой реализации данных  $\tilde{f}^{(l)} = f + \eta^{(l)}$ . В качестве вейвлет-функций использовались вейвлеты Добеши8. Так как в вычислительном эксперименте известны «точные» значения  $f_i$ , то в первой серии вычислительного эксперимента находилась минимальная ошибка фильтрации для каждой пороговой функции путем минимизации  $\bar{\delta}_f(T)$  по двум параметрам пороговой функции. В таблице 1 приведены отношения этих минимальных ошибок к минимальной ошибке пороговой функции (5) -  $\bar{\delta}_f(T_{SS})$ . Значение больше 1 говорит о проигрыше по точности фильтрации сравниваемой пороговой функции по отношению к «базовой» пороговой функции (5).

Таблица 1

Относительный уровень шума $\delta_\eta$	Отношение $\frac{\bar{\delta}_f(T_H)}{\bar{\delta}_f(T_{SS})}$	Отношение $\frac{\bar{\delta}_f(T_S)}{\bar{\delta}_f(T_{SS})}$	Отношение $\frac{\bar{\delta}_f(T_Z)}{\bar{\delta}_f(T_{SS})}$	Отношение $\frac{\bar{\delta}_f(T_{COM})}{\bar{\delta}_f(T_{SS})}$
Тест-функция 1				
0.01	1.055	1.216	1.011	1.062
0.05	1.067	1.186	1.009	1.057
0.10	1.085	1.168	0.994	1.052
Тест-функция 2				
0.01	1.065	1.317	1.013	1.054
0.05	1.074	1.182	1.011	1.033
0.10	1.089	1.142	0.998	1.031

Анализ этой таблицы показывает, что:

- «жесткая» и «мягкая» пороговые функции имеют наибольшую ошибку фильтрации, особенно последняя – у нее превышение ошибки составляет 20-30 %;
- наименьшую ошибку фильтрации имеет пороговая функция (5) – для всех уровней шума и используемых тестовых сигналов отношение больше 1. Ближайшим конкурентом является пороговая функция (6), которая чуть-чуть точнее при уровне шума 0.10 (отношение

$$\frac{\bar{\delta}_f(T_Z)}{\bar{\delta}_f(T_{SS})} = 0.994 \div 0.998,$$

но проигрывает по точности для других уровней шума.

Поэтому в качестве «наилучшей» двухпараметрической пороговой функции можно принять две пороговых функций (5), (6), которые «эквивалентны» по точности фильтрации и своей структуре, зависят от двух параметров  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и эти параметры существенно влияют на ошибку фильтрации. Однако в литературе (как отечественной, так и зарубежной) до работ автора [4,5] отсутствовали алгоритмы выбора порогов  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , позволяющие с приемлемой точностью оценить оптимальные пороги  $\lambda_{1opt}$ ,  $\lambda_{2opt}$ , доставляющие минимум СКО фильтрации, определяемой выражением:

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_2) = M \left[ \|\hat{f}_{\lambda_1, \lambda_2} - f\|^2 \right],$$

где  $M[\ ]$  - оператор математического ожидания по плотности распределения шума,  $f, \hat{f}_{\lambda_1, \lambda_2}$  - векторы, проекции которых равны значениям «точного» и «сглаженного» (при заданных пороговых величинах  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ) сигналов.

Заметим, что для однопараметрических пороговых функций (3), (4) предложено несколько алгоритмов выбора пороговой величины  $\lambda$ . В работах [2,4] сделано сравнение некоторых из этих алгоритмов. Показано, что алгоритм, построенный на основе критерия оптимальности (используемого для выбора параметра регуляризации [10-12]) позволяет достаточно точно оценить оптимальное

$$\rho_w(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\sigma^2} \langle e_{\lambda_1, \lambda_2}, \tilde{f} \rangle = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (e_{\lambda_1, \lambda_2})_i \cdot \tilde{f}_i. \quad (10)$$

Также как и в линейных алгоритмах фильтрации [3] в качестве оценок для  $\lambda_{1opt}$ ,  $\lambda_{2opt}$ , примем

$$\mathcal{G}_{m, \gamma/2} \leq \rho_w(\lambda_{1w}, \lambda_{2w}) \leq \mathcal{G}_{m, 1-\gamma/2}, \quad (11)$$

где  $\mathcal{G}_{m, \gamma/2}$ ,  $\mathcal{G}_{m, 1-\gamma/2}$  квантили  $\chi_m^2$ -распределения

значение порога  $\lambda_{opt}$ , при котором СКО фильтрации минимальна. В работах [4,5] на основе критерия оптимальности построен алгоритм оценивания оптимальных значений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  функции (5). Ниже этот подход будет распространен и для выбора порогов функции (6).

**Оценивание оптимальных пороговых величин  $\lambda_{1opt}$ ,  $\lambda_{2opt}$  на основе критерия оптимальности.** Предположим, что:

- вместо точных значений  $f_i$  дискретной сигнала даны (известны) зашумленные значения

$$\tilde{f}_i = f_i + \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где шум измерения  $\eta_i$  имеет нулевое среднее  $M[\eta_i] = 0$ , дисперсию  $\sigma^2$  и значения  $\eta_i$ ,  $\eta_j$  не коррелированы при  $i \neq j$ ;

- базисные функции  $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ ,  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  являются ортонормированными, что соответствует ортогональным вейвлетам (вейвлеты Добеши, Симлета, Кайфлета);

Для оценки оптимальных значений  $\lambda_{1opt}$ ,  $\lambda_{2opt}$  функций (5), (6) обратимся к критерию оптимальности. Критерий оптимальности был предложен в работе [10] и широко используется для выбора параметра регуляризации линейных регуляризирующих алгоритмов решения некорректных задач (например, [11,12]). Алгоритмы, построенные на основе этого критерия, позволяют оценить оптимальный (с хорошей точностью) параметр регуляризации, не используя при этом количественную информацию об искомом решении задачи. Для оценивания оптимального параметра сглаживания линейных алгоритмов Фурье-фильтрации этот критерий использовался в работе [3]. Хотя пороговые функции делают алгоритм вейвлет-фильтрации нелинейным, попытаемся использовать идею критерия оптимальности для оценивания оптимальных пороговых величин  $\lambda_{1opt}$ ,  $\lambda_{2opt}$ . Для этого определим вектор невязки  $e_{\lambda_1, \lambda_2} = \tilde{f} - \hat{f}_{\lambda_1, \lambda_2}$  и введем статистику:

значения  $\lambda_{1w}$ ,  $\lambda_{2w}$ , для которых статистика  $\rho_w(\lambda_{1w}, \lambda_{2w})$  удовлетворяет неравенству:

с  $m$  степенями свободы уровней  $\gamma/2$ ,  $1-\gamma/2$

соответственно,  $\gamma$  - вероятность ошибки первого рода при проверке статистической гипотезы об оптимальности параметра сглаживания (обычно  $\gamma = 0.05$ ),  $m = N$  - число значений фильтруемого сигнала (проекция вектора  $\tilde{f}$ ). Если число степеней свободы  $m > 30$  (в задачах фильтрации это всегда выполняется), то  $\chi_m^2$ -распределение хорошо аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $m$  и дисперсией  $2m$ . Тогда, приняв вероятность ошибки первого рода  $\gamma = 0.05$ , получаем формулы для вычисления квантилей, входящих в неравенство (11)

$$\mathcal{G}_{m,0.025} = m - 1.96\sqrt{2m};$$

$$\mathcal{G}_{m,0.975} = m + 1.96\sqrt{2m}. \quad (12)$$

Для вычисления оценок  $\lambda_{1W}, \lambda_{2W}$ , следуя работе [5] пороговые величины  $\lambda_1, \lambda_2$  функций (5), (6) определим в виде:

$$\lambda_1(\beta) = \beta \cdot \sqrt{2 \ln(N_j)};$$

$$\lambda_2(\beta, C) = \beta \cdot C \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (13)$$

где  $N_j$  - количество обрабатываемых коэффициентов  $j$ - уровня, множитель  $C > 1$  следует из неравенства  $\lambda_2 > \lambda_1$  (см. (5), (6)).

Заметим, что сомножитель  $\sqrt{2 \cdot \ln(N_j)}$  делает пороги уровневнезависимыми и обеспечивает асимптотическую оптимальность пороговых

$$\rho_W(\beta, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \cdot \left( \tilde{d}_{j,k} - T(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_1(\beta), \lambda_2(\beta, C)) \right). \quad (18)$$

Это позволяет находить значения критерия (при реализации процедуры минимизации) в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения, а затем (при найденных  $\beta_W, C_W$  и вычисленных  $\hat{d}_{j,k}$ ) только один раз выполнить обратное вейвлет-преобразование и получить сглаженные значения функции.

Отметим некоторые свойства  $\rho_W(\beta, C)$ , которые следуют из (18):

$$\rho_W(\beta, C) \rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\tilde{f}\|^2. \quad (19)$$

Последнее равенство имеет место для ортогональных вейвлетов при соответствующей нормировке базисных функций. Два последних свойства обуславливают следующее утверждение.

**Утверждение.** Если выполняется неравенство

величин по порядку при  $N_j \rightarrow \infty$ .

Следовательно, необходимо оценить  $\beta_{opt}, C_{opt}$ , используя статистику (10), т.е. вычислить значения  $\beta_W, C_W$ , которые удовлетворяют неравенству:

$$\mathcal{G}_{m,\gamma/2} \leq \rho_W(\beta_W, C_W) \leq \mathcal{G}_{m,1-\gamma/2}. \quad (14)$$

Тогда оценки  $\lambda_{1W}, \lambda_{2W}$  определяются выражениями:

$$\lambda_{1W} = \beta_W \cdot \sqrt{2 \ln(N_j)};$$

$$\lambda_{2W} = \beta_W \cdot C_W \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (15)$$

Для вычисления  $\beta_W, C_W$  вместо решения нелинейного уравнения

$$\rho_W(\beta, C) = m, \quad (16)$$

включающего две неизвестные величины  $\beta, C$ , рассмотрим задачу минимизации функционала

$$F(\beta, C) = |\rho_W(\beta, C) - m|^2. \quad (17)$$

Заметим, что решение этой задачи всегда существует и для его нахождения можно использовать известные процедуры минимизации. В качестве  $\beta_W, C_W$  принимается такой элемент  $\{\beta^{(n)}, C^{(n)}\}$  минимизирующей последовательности, для которого выполняется неравенство (14).

Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлетов критерий  $\rho_W(\beta, C)$  вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложения:

- все слагаемые, входящие в формулу (18), не отрицательны (могут изменяться от 0 до  $\tilde{d}_{j,k}^2$ ) и поэтому  $\rho_W(\beta, C) \geq 0$ ;
- при  $\beta \rightarrow 0$  и  $C < \infty$  справедлив предел  $\rho_W(\beta, C) \rightarrow 0$ ;
- при  $\beta \rightarrow \infty$  и  $C < \infty$  справедлив предел

$$\rho_W(\infty, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i^2 > \mathcal{G}_{m,1-\gamma/2}, \quad (20)$$

то существуют конечные значения  $\beta_W, C_W$ , для которых выполняется неравенство (14).

Невыполнение условия (14) означает, что значения  $\tilde{f}_i = \eta_i$ , т.е.  $f_i \equiv 0$ . В этом случае

$\beta_w = \infty$  и сглаженные значения равны 0.

Заметим, что изложенный алгоритм построения оценок  $\beta_w, C_w$  легко обобщается для вейвлет-фильтрации изображений. В этом случае число степеней свободы  $m$  (см. неравенство (14)) определяется как  $m = N_x \cdot N_y$ , где  $N_x, N_y$  – размеры фильтруемого изображения.

Существенной чертой приведенного алгоритма вычисления  $\theta_w$  является использование дисперсии шума  $\sigma^2$ . На практике, как правило, эта величина неизвестна, и в этом случае можно использовать оценку для среднеквадратического отклонения  $\sigma$ :

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)}{0.6745}, \quad (21)$$

где оператор  $\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)$  вычисляет медиану абсолютных величин детализирующих коэффициентов уровня разложения  $j_0 + 1$  (объем выборки равен  $N/2$ ). Эта оценка широко используется в робастных алгоритмах

$$\delta_f(T(\beta, C)) = \frac{\|\hat{f}(T(\beta, C)) - f\|}{\|f\|}. \quad (22)$$

Первоначально рассмотрим зависимость  $\delta_f(T(\beta, C))$  от различных параметров пороговых функций (5), (6). На рис. 6 а) приведены изолинии функционала  $\bar{\delta}_f(T_{SS}(\beta, C))$ , равным среднему значению функционалов  $\delta_f(T_{SS}(\beta, C))$  (объем выборки равен 30), которые были вычислены при уровне шума  $\delta_\eta = 0.15$  для тест-функции 2. На рис. 6 б) представлены изолинии функционала  $\bar{\delta}_f(T_Z(\beta, C))$ . На этих рисунках по оси абсцисс отложен параметр  $\beta$ , по оси ординат –  $C$ . Видно, что у пороговой функции (5) ошибка фильтрации сильно зависит от  $\beta$ , и практически не зависит от параметра  $C$ . Для пороговой функции (6) наблюдается зависимость ошибки фильтрации как от  $\beta$ , так и от  $C$ , что предъявляет более строгие требования к точности оценивания  $C_{opt}$  и поэтому эта пороговая функция является менее предпочтительной по сравнению с функцией (5).

регрессионного анализа. Применительно к алгоритмам вейвлет - фильтрации эта оценка исследовалась в работе [3,4], где была показана приемлемая точность оценки (21). Так для заданной дисперсии  $\sigma^2 = 0.91 \cdot 10^{-1}$  значения оценки (21), вычисленные по 30 реализациям длиной ( $N/2=1024$ ) находились в интервале  $[0.88 \cdot 10^{-1}, 0.97 \cdot 10^{-1}]$ .

**Численные исследования алгоритма выбора пороговых величин.** Приведем некоторые результаты второй серии вычислительного эксперимента, целью которых являлось исследование точности оценивания оптимальных значений пороговых величин на основе критерия оптимальности.

В качестве тестовых сигналов были взяты тест-функции № 1, №2 (см. рис. 4, 5). Относительный уровень шума определялся величиной  $\delta_\eta$ , а относительная ошибка фильтрации (зависящая уже от двух величин  $\beta, C$ ) выражением

Перейдем к исследованию эффективности оценивания оптимальных параметров пороговых функций предложенным алгоритмом на основе минимизации функционала (17). В ячейках таблицы 2 приведены значения средних величин  $\bar{\delta}_f(T_{SS}(\beta, C))$ , вычисленные для тест-функции 2 и уровня шума 0.15. Затемненные ячейки соответствуют парам параметров  $(\beta_w, C_w)$ , для которых удовлетворяется неравенство (14) и которые являются оценками для оптимальных параметров  $\beta_{opt}, C_{opt}$ . Видно, что эти ячейки соответствуют минимальным (или практически минимальным) значениям относительной ошибки фильтрации и следовательно параметры  $\beta_w, C_w$  являются эффективными оценками для оптимальных параметров пороговой функции (5). Аналогичная картина наблюдается и для пороговой функции (6).

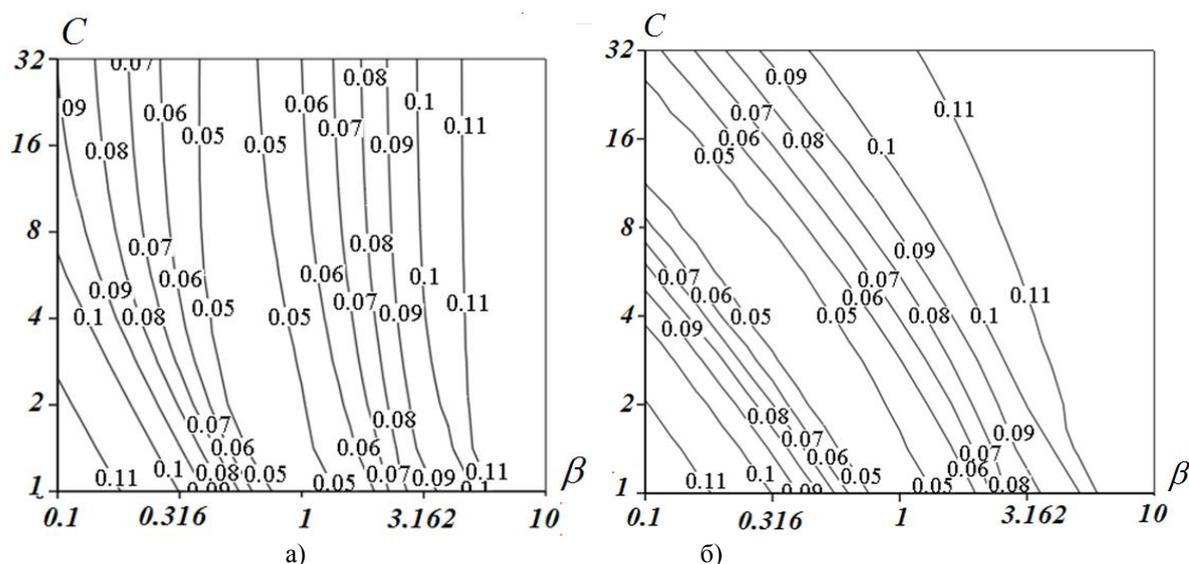


Рис. 6. Графики изолиний относительных ошибок вейвлет-фильтрации

Таблица 2

$C \backslash \beta$	1.414	2.00	2.828	4.00	5.657	8.00	11.314
0.251	0.100	0.091	0.081	0.073	0.068	0.065	0.064
0.316	0.091	0.079	0.068	0.062	0.058	0.056	0.055
0.398	0.078	0.063	0.055	0.052	0.05	0.049	0.049
0.501	0.060	0.050	0.046	0.045	0.045	0.046	0.047
0.631	0.047	0.044	0.044	0.045	0.045	0.046	0.047
0.794	0.045	0.046	0.047	0.048	0.050	0.051	0.052
1.00	0.047	0.049	0.051	0.053	0.055	0.057	0.058
1.259	0.053	0.055	0.058	0.060	0.063	0.064	0.066
1.585	0.058	0.062	0.066	0.069	0.071	0.073	0.075

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Предложенный подход к выбору параметров двухпараметрических пороговых функций позволяет с приемлемой точностью оценить оптимальные пороги как для пороговой функции (5), так и для функции (6). Однако, использование функции (5) в пороговых алгоритмах вейвлет-фильтрации является более предпочтительным по сравнению с функцией (6) из-за меньшей минимальной ошибки фильтрации (см. табл. 1) и менее жестких требований к точности оценивания оптимальных пороговых величин (см. рис. 6).

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] Fodor, I. K., Kamath C. Denoising through Wavelet Shrinkage: An Empirical Study//SPIE Journal on Electronic Imaging. 2003. vol. 12, N 1, p. 151-160.  
 [2] Воскобойников Ю.Е., Гочаков А.В. Оценивания оптимальных пороговых величин в алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений. Автометрия. 2011. т. 47. №2. С. 3-12.  
 [3] Воскобойников Ю.Е., Гочаков А.В., Колкер А.В. Фильтрация сигналов и изображений: Фурье и

вейвлет алгоритмы (с примерами в Mathcad) Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. 188 с.  
 [4] Воскобойников Ю.Е. Вейвлет-фильтрация сигналов и изображений (с примерами в Mathcad) Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2015. 196 с.  
 [5] Воскобойников Ю.Е., Гочаков А.В. Построение алгоритмов вейвлет-фильтрации с двухпараметрическими пороговыми функциями. Автометрия. 2012. т. 48. N 1. P. 17-29.  
 [6] Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1989. v.11. N 9. P. 674-693.  
 [7] Gao H-Y, Bruce A.G. Waveshrink with firm shrinkage. Statistica Sinica. 1997. V. 7. P. 855-874.  
 [8] Lin Y, Ma Y, Liu F, Zhang X. The research based on genetic algorithm of wave image denoising threshold of medicine//Journal of chemical and pharmaceutical research. – 2014. V. 6. N 6. – P. 2458-2462.  
 [9] Liu T., Zeng X.L., Zeng J. Getting practical wavelet analyses. National defense industry press. China: Beijing. 2006. 352 P.  
 [10] Воскобойников Ю. Е. Оценивание оптимального параметра регуляризирующего алгоритма восстановления изображений. Ю. Е. Воскобойников. Автометрия. 1995. № 3. С. 64–72.  
 [11] Воскобойников Ю. Е. Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации:

монография. Ю. Е. Воскобойников. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. 186 с.

- [12] Воскобойников Ю.Е. Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач: Монография. Ю. Е. Воскобойников. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), НГАСУ. 2007. 184 с.



**Воскобойников Юрий Евгеньевич**, доктор физ.-мат. наук, профессор, Заслуженный работник Высшей школы РФ, Соросовский профессор, действительный член МАИ, РАЕ, МАН ВШ, заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирского государственного ар-

хитектурно-строительного университета (Сибстрин), профессор кафедры автоматки НГТУ. Автор более 290 публикаций, 6 монографий, посвященных решению некорректных задач интерпретации данных и обработке сигналов и изображений и большого числа учебных пособий. E-mail: [voscob@mail.ru](mailto:voscob@mail.ru)

### **Wavelet filtering with two parametric threshold functions: selection of the function and justification of optimal parameters**

Y.E. Voskobojnikov

*Abstract:* This paper studies the optimization of wavelet filtering algorithms with two-parameter threshold functions. Optimization of wavelet filtering algorithm is performed in two directions: a) optimization by selecting of the best function of

the threshold used in practice functions; b) optimization by evaluating of the optimal parameters of the best threshold function.

*Key words:* estimation, wavelet transform, filtering

### **REFERENCES**

- [1] Fodor, I. K., Kamath C. Denoising through Wavelet Shrinkage: An Empirical Study. SPIE Journal on Electronic Imaging. 2003. vol. 12, N. 1, pp. 151-160.
- [2] Voskobojnikov Ju.E., Gochakov A.V. Ocenivaniya optimal'nyh porogovyh velichin v algoritmah vejvlet-fil'tracii izobrazhenij. Avtometrija. 2011. t. 47. №2. S. 3-12.
- [3] Voskobojnikov Ju.E., Gochakov A.V., Kolker A.B. Fil'tracii signalov i izobrazhenij: Fur'e i vejvlet algoritmy (s primerami v Mathcad) Novosibirsk: NGASU (Sibstrin), 2010. 188 s.
- [4] Voskobojnikov Ju.E. Vejvlet-fil'tracii signalov i izobrazhenij (s primerami v Mathcad) Novosibirsk: NGASU (Sibstrin), 2015. 196 s.
- [5] Voskobojnikov Ju.E., Gochakov A.V. Postroenie algoritmov vejvlet-fil'tracii s dvuhparametricheskimi porogovymi funkcijami. Avtometrija. 2012. t. 48. N 1. P. 17-29. Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1989. v.11. N 9. P. 674-693.
- [6] Gao H-Y, Bruce A.G. Waveshrink with firm shrinkage. Statistica Sinica. 1997. V. 7. P. 855-874.
- [7] Lin Y, Ma Y, Liu F, Zhang X. The research based on genetic algorithm of wave image denoising threshold of medicine. Journal of chemical and pharmaceutical research. 2014.