

О нецелесообразности применения дробно-степенных ПИД-регуляторов

Вадим Жмудь^{1,2}, Александр Заворин²

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
oao_nips@bk.ru

Аннотация. Регуляторы с нецелой степенью интегрирования и (или) дифференцирования, называемые дробно-степенными (fractional order), описываются во многих статьях [1–4]. В нашей статье [5] мы показывали, что имеется возможность достижения более простым регулятором соизмеримых или лучших результатов в сравнении с известным изощренным методом синтеза ПИ^λД^μ-регуляторов, более сложных, чем широко известные и повсеместно применяемые ПИД-регуляторы. В результате продемонстрирована возможность достижения лучших результатов более простым путем¹. Однако новые публикации на эту тему возникают, что свидетельствует о несогласии или о неосведомленности авторов этих публикаций с нашим утверждением, в связи с чем целесообразно дальнейшее детальное разъяснение нашей позиции.

Ключевые слова: численная оптимизация, регуляторы, автоматика, моделирование, динамика систем, точность управления

ВВЕДЕНИЕ

Задача относится к области автоматического управления в контуре с отрицательной обратной связью.

Типовая структура системы содержит объект, регулятор и обратную связь, как показано на *Рис. 1*. Регулятор при этом содержит три параллельных канала воздействия на объект: пропорциональный, интегрирующий и дифференцирующий усилитель. Это дает название регулятору: ПИД-регулятор. Пропорциональный регулятор обеспечивает требуемую точность системы в области средних частот, интегрирующий усилитель наиболее сильно усиливает сигналы в области низких частот и обеспечивает высокую точность системы с этой области. Дифференцирующий усилитель обеспечивает подъем амплитудно-частотной характеристики в области высоких частот, вследствие этого достигается устойчивость системы и достаточно высокое качество управления, то есть небольшое перерегулирование или его полное отсутствие.

ПИД-регулятор, как правило, дается

уравнением вида:

$$W_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s. \quad (1)$$

Здесь K_N – коэффициенты пропорционального, интегрирующего и дифференцирующего усилителей, s – аргумент преобразования Лапласа, в упрощенной интерпретации оператор дифференцирования, вследствие чего $1/s$ – оператор интегрирования.

Использование преобразования Лапласа позволяет преобразовать дифференциальные уравнения в алгебраические. Вследствие этого один и тот же оператор s позволяет просто записать дифференцирование и интегрирование, в зависимости от его степени (+1 или -1). В выражение для пропорционального усилителя s входит в нулевой степени.

Поэтому велик соблазн использовать s в нецелой степени, больше или меньше единицы, как в числителе, так и в знаменателе.

Распространен взгляд, состоящий в том, что более эффективный метод управления состоит в применении неполного интегрирования и (или) дифференцирования [1–6]. Суть так называемого регулятора с дробным порядком интегрирования и (или) дифференцирования (ПИ^λД^μ-регулятора) заключается том, что: а) утверждается, что использование нецелой степени эта идея дает положительный эффект по крайней мере, в ряде задач; б) утверждается, что в рамках наперед заданной точности такой регулятор может быть реализован в структуре, использующей лишь целую степень интегрирования и дифференцирования.

Оба этих тезиса могут быть справедливыми для некоторых примеров, однако при этом забывается, что попытка реализовать неполное интегрирование и (или) дифференцирования приводит к настолько сложной структуре регулятора, что эта избыточная сложность уже никак не оправдывается. Более действенный эффект можно получить с менее сложным регулятором. Это сводит на нет полезность идеи неполного интегрирования и (или) дифференцирования.

¹ Работа выполнена по заданию Министерства образования и науки РФ, проект №7.599.2011, Темплан, НИР № 01201255056.

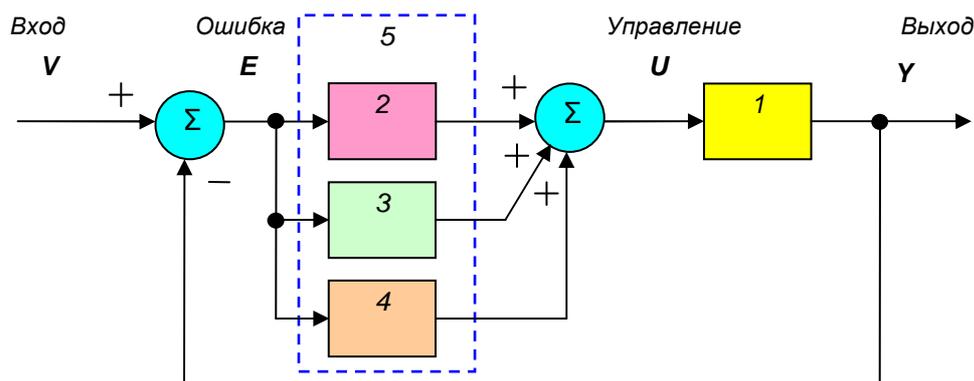


Рис. 1. Структурная схема системы с компенсирующим звеном и с ПИД-регулятором: 1 – объект, 5 – регулятор, 2 – пропорциональный усилитель, 3 – интегрирующий усилитель, 4 – дифференцирующий усилитель

Можно игнорировать это утверждение при условии отыскания метода простой реализации такого регулятора, однако в литературе не найдено структур, позволяющих непосредственно и точно реализовать дробно-степенной регулятор иным способом, кроме аппроксимации множеством звеньев с интегрирующими и дифференцирующими свойствами.

ПИД^{λμ}-регулятор предлагается формировать в форме аппроксимации рациональной передаточной функцией [3–4] в виде:

$$W_{RF}(s) = K_P + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu. \quad (2)$$

Здесь λ, μ – числа, отличающиеся от единицы. При очевидной простоте записи уравнения (2), реализация такого регулятора – задача не простая.

1. В ЧЕМ СУТЬ ЦЕЛОГО И НЕЦЕЛОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если интегрирование и дифференцирование может быть реализовано в аналоговом виде с помощью одного операционного усилителя и резистивно-емкостной цепочки, то для реализации неполного интегратора или неполного дифференцирующего усилителя требуется цепь из большого количества конденсаторов и резисторов. В частности, на Рис. 2 показана упрощенная принципиальная схема пропорционального усилителя, на Рис. 3 – интегрирующего усилителя, на Рис. 4 – дифференцирующего усилителя.

При реализации регулятора в цифровом виде интегрирование может быть представлено суммированием значений сигнала, а дифференцирование – вычислением его приращений (вычитанием).

Введение каких-либо коэффициентов перед суммированием или дифференцированием будет измерять коэффициенты K_I и K_D , но не

преобразует целое интегрирование или дифференцирование в нецелое.

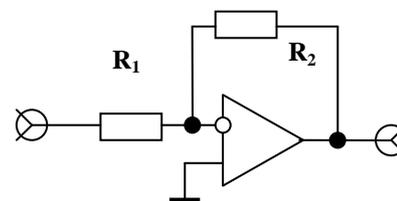


Рис. 2. Упрощенная принципиальная схема пропорционального усилителя

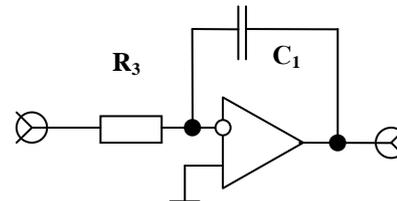


Рис. 3. Упрощенная принципиальная схема интегрирующего усилителя

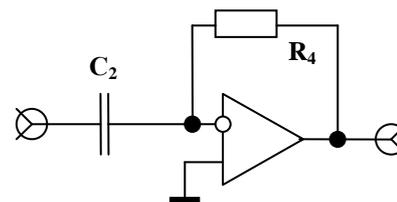


Рис. 4. Упрощенная принципиальная схема дифференцирующего усилителя

Пусть сигнал ошибки представлен последовательностью отсчетов e_N , где N – номер отсчета. В этом случае пропорциональный регулятор в цифровом виде будет представлен серией отсчетов в соответствии с соотношением:

$$u_{NP} = K_P e_N. \quad (3)$$

Интегрирующий регулятор в цифровом виде будет представлен серией отсчетов в соответствии со следующим соотношением:

$$u_{NI} = u_{N-1} + K_I e_{N-1}. \quad (4)$$

Дифференцирующий регулятор в цифровом

виде будет представлен серией отсчетов в соответствии с соотношением:

$$u_{ND} = K_D (e_N - e_{N-1}). \quad (5)$$

Полный ПИД-регулятор в цифровом виде будет реализовываться в соответствии с уравнением:

$$u_N = u_{NPD} + u_{NI} + u_{ND}. \quad (6)$$

Амплитудно-частотная характеристика пропорционального звена в логарифмических осях представляется прямой линией, параллельной оси абсцисс, как показано на *Рис. 5*. Амплитудно-частотные характеристики интегрирующего и дифференцирующего усилителей показаны, соответственно, на *Рис. 6* и *7*.

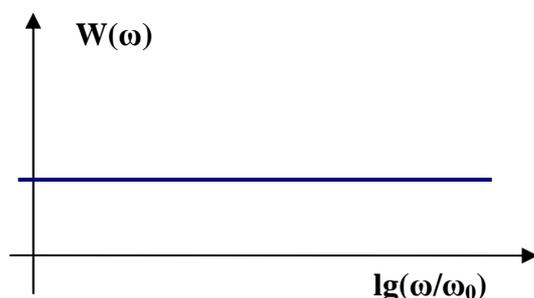


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика пропорционального усилителя

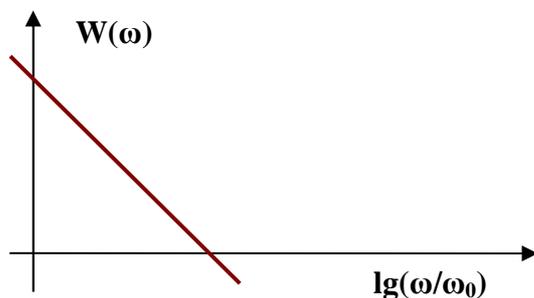


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика интегрального усилителя

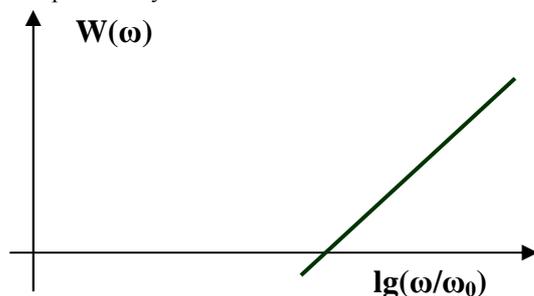


Рис. 7. Амплитудно-частотная характеристика дифференцирующего усилителя

При параллельном включении трех усилителей их амплитудно-частотные характеристики складываются. В логарифмическом масштабе результат суммирования приблизительно совпадает с верхней огибающей линией, как показано на *Рис. 8*.

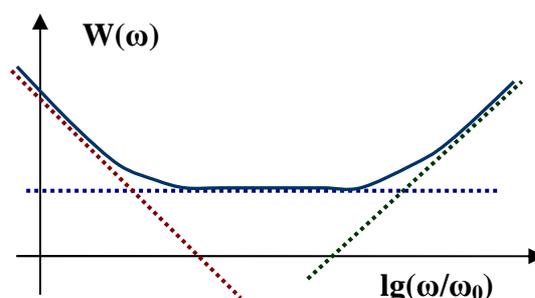


Рис. 8. Амплитудно-частотная характеристика ПИД-регулятора

Таким образом, на *Рис. 8* показана типичная амплитудно-частотная характеристика ПИД-регулятора. Как видим, она содержит три участка, которые имеют приблизительно постоянный наклон, соответствующий целому интегрированию, пропорциональному усилению и целому дифференцированию. Также эта характеристика содержит два сопрягающих участка, на которых интегрирование плавно переходит в пропорциональное усиление и пропорциональное усиление плавно переходит в дифференцирование.

Если интегрирование и (или) дифференцирование является нецелым, то наклон асимптот у этого регулятора изменится. Наклон асимптоты целого интегратора составляет минус двадцать децибел на декаду, а наклон целого дифференцирующего усилителя – плюс двадцать децибел на декаду. Иными словами, увеличение частоты в 10 раз вызывает уменьшение амплитудно-частотной характеристики интегратора в 10 раз и увеличение амплитудно-частотной характеристики дифференцирующего звена в 10 раз. При некратном интегрировании или дифференцировании такое изменение должно быть на этом интервале не в 10 раз, а в какое-то иное количество раз. В частности, половинный интегратор должен иметь вдвое меньший наклон, чем целый интегратор. Угол наклона характеристики интегратора или дифференцирующего усилителя будет равен тангенсу показателя степени s , умноженному на 20 дБ/дек.

На *Рис. 9* показаны два варианта ПИ ^{λ} Д ^{μ} -регулятора: в случае 1 оба показателя степени меньше единицы, в случае 2 оба показателя больше единицы. При различных значениях λ и μ вид характеристики 9, безусловно, может быть задан с большим разнообразием, чем вид характеристики 8, что создает иллюзию большей универсальности регулятора (2) в сравнении с регулятором (1). Это было бы справедливым, если бы параметры λ и μ можно было легко изменять при физической реализации регулятора. К сожалению, это не так.

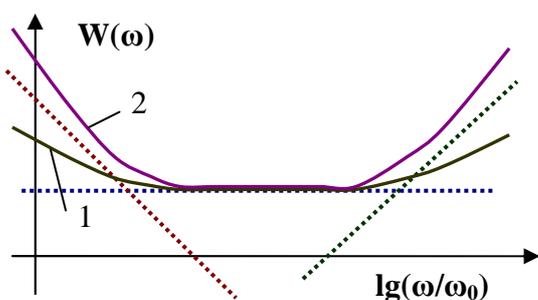


Рис. 9. Амплитудно-частотная характеристика ПИ^λД^μ-регулятора: 1 – λ<1, μ<1; 2 – λ>1, μ>1

Фактическая реализация нецелого наклона осуществляется последовательным включением целого ряда дифференцирующих и интегрирующих усилителей.

Уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$W_R(s) = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s} \quad (7)$$

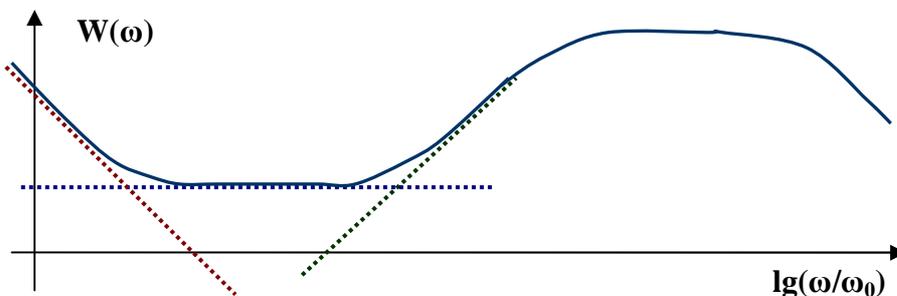


Рис. 10. Амплитудно-частотная характеристика реального ПИД-регулятора с учетом рассмотрения самой высокочастотной части

Кроме того, следует отметить, что эффект дифференцирования полезен лишь в крайне ограниченном частотном диапазоне, вне этого диапазона дифференцирование не приносит пользы.

В связи с этим нет никакой необходимости реализации идеального дифференцирующего усилителя. Это не только невозможно, но и не требуется.

В случае цифрового вычисления управляющего сигнала по соотношению (5) частотный диапазон дифференцирующего устройства ограничен сверху частотой взятия отсчетов сигнала ошибки. На более высоких частотах сигнала регулятора просто не существует, он формируется дискретно.

В случае реализации дифференцирующего усилителя методом аналоговой техники вместо устройства, показанного на Рис. 4, рекомендуется применять устройство по схеме, показанной на Рис. 11.

Если в устройстве, показанном на Рис. 4, на высоких частотах емкостное сопротивление конденсатора C_2 стремится к нулю. Следовательно, коэффициент усиления этого устройства на высоких частотах должен

Видим, что ПИД-регулятор может быть реализован в виде дроби, в числителе и знаменателе которой стоят полиномы от s .

Отметим, что степень числителя в данном случае выше степени знаменателя, что указывает на невозможность физически реализовать данный регулятор.

Действительно, ПИД-регулятор в идеальном виде (1) или (7) невозможно реализовать на практике. В действительности любое реальное звено имеет ограниченную передаточную функцию по частоте: с ростом частоты эта передаточная функция может возрастать лишь на отдельных участках, но, в конце концов, она не только должна перестать расти, а также и начать снижаться. Таким образом, на Рис. 8 и 9 показаны не полностью амплитудно-частотные характеристики регуляторов, их высокочастотная часть отсутствует, на самом деле она неминуемо должна прекратить рост и перейти в ниспадающую ветвь, как показано на Рис. 10.

стремиться к бесконечности, а на практике от стремится к значению усиления применяемого операционного усилителя на данной частоте, что даст ниспадающую характеристику, как на Рис. 10 в области высоких частот.

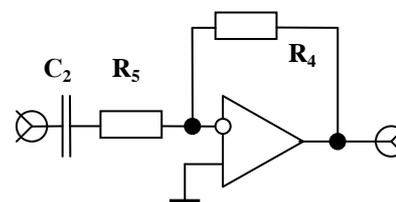


Рис. 11. Упрощенная принципиальная схема реального дифференцирующего усилителя

В устройстве, показанном на Рис. 11, с ростом частоты емкостное сопротивление конденсатора C_2 также стремится к нулю, но это не приведет к эффекту размыкания обратной связи. Усиление этого устройства станет постоянным, равным отношению сопротивлений R_4 к R_5 . После того, как это отношение будет больше собственного коэффициента усиления данного операционного усилителя на данной частоте, амплитудно-частотная характеристика также начнет свое

ниспадать как собственная характеристика усилителя.

Амплитудно-частотная характеристика такого звена показана на *Рис. 12*.

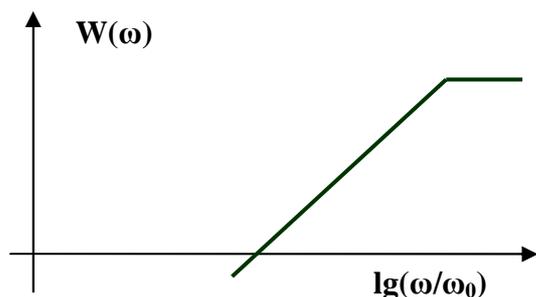


Рис. 12. Асимптотическая (приближенная) амплитудно-частотная характеристика реального дифференцирующего усилителя, показанного на *Рис. 11*

Дополнительным преимуществом схемы по *Рис. 11* перед схемой по *Рис. 4* является достаточно большое входное сопротивление этого устройства. Действительно, на всех частотах оно не меньше, чем R_6 , тогда как в схеме по *Рис. 4* оно является реактивным сопротивлением конденсатора C_2 и с ростом частоты стремится к нулю. Это может вызвать некорректную работу предыдущего каскада усиления, в том числе вызвать возбуждение всей электронной схемы.

Рассмотрим уравнение реального дифференцирующего устройства:

$$W_{D1}(s) = K_1 \frac{\tau s + 1}{Ts + 1} \quad (8)$$

В случае $\tau \gg T$ это устройство полностью выполняет функции дифференцирующего устройства. В области низких частот слагаемыми, содержащими s , можно пренебречь, поэтому передаточная функция в этой области частот приближается к пропорциональному усилителю с коэффициентом K_1 . В области высоких частот, наоборот, члены, содержащие s , становятся наиболее существенными, в этой области можно пренебречь единичными слагаемыми в числителе и знаменателе. После сокращения s видно, что передаточная функция приближается к передаточной функции пропорционального усилителя с коэффициентом $K_1 \tau/T$. В области средних частот, где $\tau s > 1$, но $Ts < 1$, происходит рост амплитудно-частотной характеристики устройства по уравнению (8). Амплитудно-частотная характеристика этого звена при указанных условиях показана на *Рис. 13*. На *Рис. 14* показана принципиальная схема устройства, реализующего усилитель по этому уравнению.

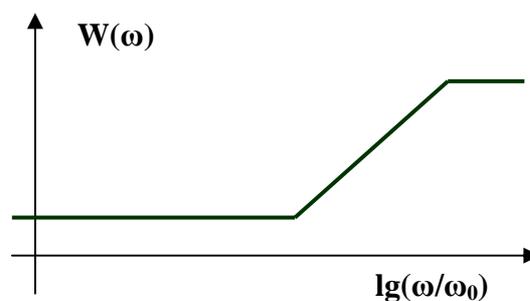


Рис. 13. Асимптотическая (приближенная) амплитудно-частотная характеристика реального дифференцирующего усилителя по уравнению (8) при $\tau \gg T$

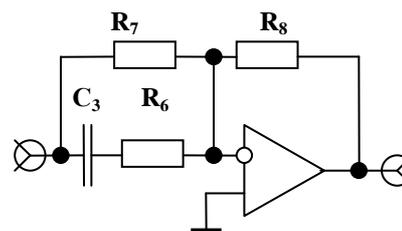


Рис. 14. Упрощенная принципиальная схема дифференцирующего усилителя по уравнению (8) при $\tau \gg T$

В случае $\tau \ll T$ устройство (8) выполняет функции местного интегратора. Аналогичными рассуждениями получаем вид амплитудно-частотной характеристики, показанный на *Рис. 15*. На *Рис. 16* показана принципиальная схема устройства, реализующего усилитель по этому уравнению.

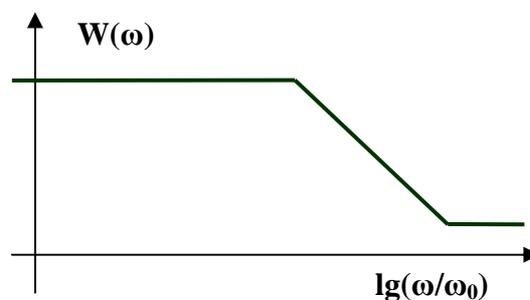


Рис. 15. Асимптотическая (приближенная) амплитудно-частотная характеристика реального дифференцирующего усилителя по уравнению (8) при $\tau \ll T$

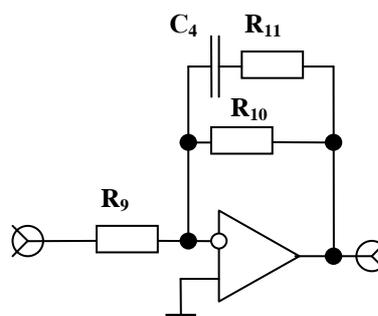


Рис. 16. Упрощенная принципиальная схема дифференцирующего усилителя по уравнению (8) при $\tau \ll T$

Последовательное включение нескольких устройств местного дифференцирования и интегрирования позволяет реализовать приближенно нецелое интегрирование или дифференцирование. Действительно, если асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика будет иметь вид ломаной линии, то реальная характеристика будет плавной, как показано на *Рис. 17*. На *Рис. 18* показана принципиальная схема аналогового устройства, реализующего неполное интегрирование.

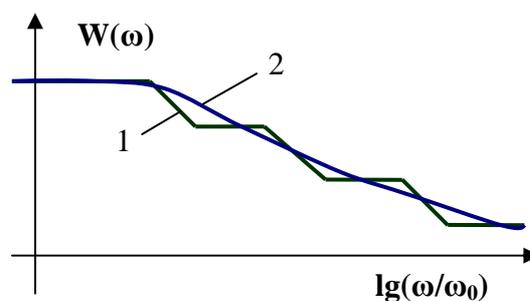


Рис. 17. Асимптотическая (1) и фактическая (2) амплитудно-частотная характеристика неполного интегрирующего усилителя

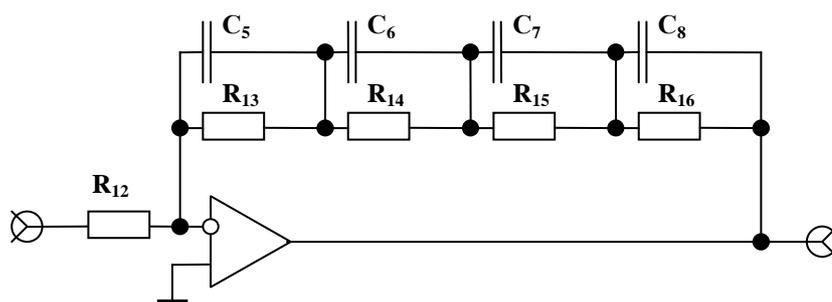


Рис. 18. Упрощенная принципиальная схема неполного интегратора

По этой методике можно реализовать также неполное дифференцирование. На *Рис. 19* показана соответствующая амплитудно-частотная характеристика, а на *Рис. 20* приведена упрощенная принципиальная схема устройства неполного дифференцирования.

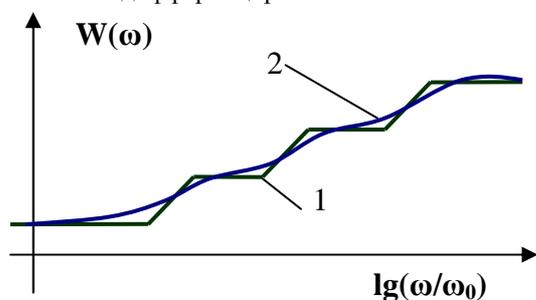


Рис. 19. Асимптотическая (1) и фактическая (2) амплитудно-частотная характеристика неполного интегрирующего усилителя

Таким образом, физическая реализация регулятора (2) в аналоговом виде требует достаточно сложной структуры.

Если $\lambda < 1$, $\mu < 1$, то для реализации такого

регулятора требуется четыре усилителя: один суммирующий и три усилителя на его входе, соответственно, по схемам *Рис. 2*, *Рис. 18* и *Рис. 20*. По количеству усилителей эта схема аналогична схеме обычного ПИД-регулятора, но по количеству аналоговых элементов существенно ее превышает. Если же $\lambda > 1$, $\mu > 1$, то последовательно с неполным интегратором или дифференцирующим устройством следует включать полный интегратор или дифференцирующий усилитель. Кроме того, следует соблюдать правило: для реализации каждого элемента следует использовать инвертирующий режим усилителя, следовательно, для реализации инвертирующего регулятора в каждом тракте необходимо использовать нечетное количество усилителей. Если же в объекте (вместе с датчиком и приводом) имеется инвертирование, и в регуляторе инвертирование не требуется, то в каждом тракте регулятора должно быть четное количество усилителей.

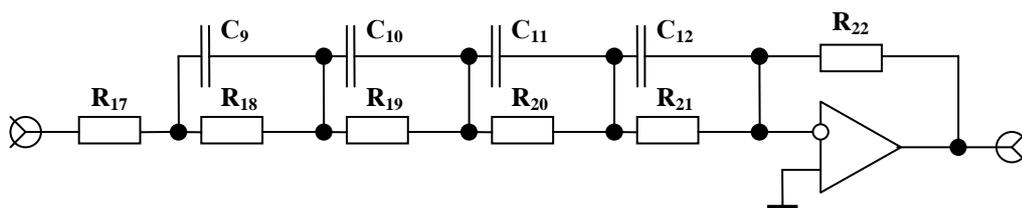


Рис. 20. Упрощенная принципиальная схема неполного дифференцирующего устройства

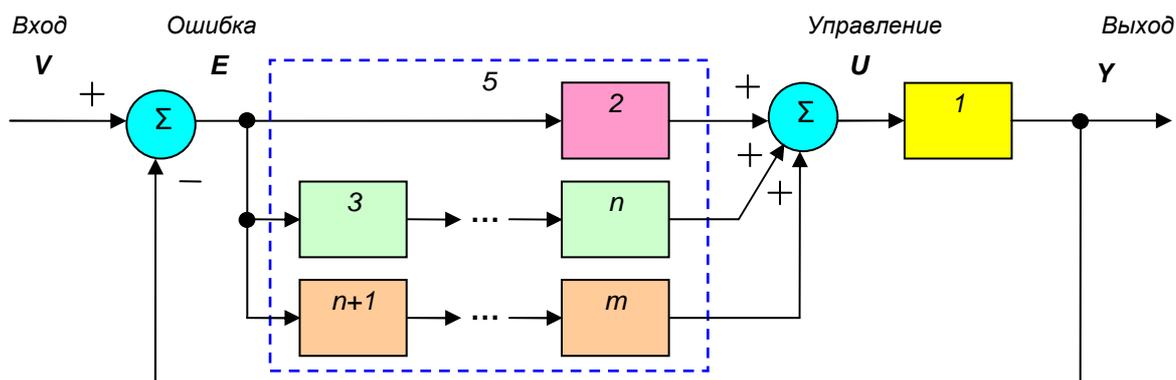


Рис. 21. Структурная схема системы с компенсирующим звеном и с ПИ²Д^m-регулятором: 1 – объект, 5 – регулятор, 2 – пропорциональный усилитель, 3...n – элементы для реализации неполного интегрирующего усилителя, n+1 ... m – элементы для реализации неполного дифференцирующего усилителя

Видно, что указанный регулятор, показанный на Рис. 21, намного сложнее, чем регулятор, показанный на Рис. 1. Из сопоставления уравнений (2) и (1) далеко не так очевидно, что реализация регулятора по уравнению (2) намного сложнее, чем реализация регулятора по уравнению (1).

2. ДЛЯ ЧЕГО СЛУЖИТ РЕГУЛЯТОР

2.1. Зачем в регуляторе дифференцирующий тракт

Для того чтобы замкнутый контур работал наилучшим образом, требуется выполнение ряда условий в отношении амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик контура в разомкнутом состоянии.

Под объектом понимают объединенные воедино все те части системы, математическая модель которых не может быть изменена при проектировании регулятора, поскольку эта часть задана свойствами элементов, вошедших в постановку задачи. Как правило, в объект входит само элемент, выходная величина которого должна соответствовать предписанному значению, а также приводы, то есть устройства, воздействующие на этот элемент, и датчики, то есть устройства, позволяющие измерять выходную величину.

Математическая модель этой совокупности не всегда соответствует желаемому виду контура в разомкнутом состоянии. Регулятор доводит эту модель до такого вида, который соответствует требованиям, предъявляемым к системе. В связи с этим уместен вопрос о том, каковы предъявляемые требования к разомкнутому контуру управления.

Для ответа на этот вопрос разобьем класс линейных объектов на два: минимально-фазовые и неминимально-фазовые. К первому классу относят объекты, не содержащие звеньев чистого запаздывания, ко второму классу – объекты с такими звеньями. Поскольку сам регулятор является минимально-фазовым, то

класс системы будет соответствовать классу объекта.

Для минимально-фазовых систем наклон логарифмической амплитудно-частотной характеристики однозначно связан с запаздыванием по фазе. То есть в той области, где наклон равен нулю, сдвиг по фазе между входным и выходным сигналами примерно равен нулю. В области, где этот наклон равен минус двадцать децибел на декаду, сдвиг достигает 90°. При другом наклоне сдвиг занимает промежуточное положение, а при большем – больше. В дифференцирующем тракте регулятора в той области, где наклон положителен, сдвиг фазы положителен, то есть имеется некоторое опережение по фазе выходного сигнала по отношению ко входному. Это опережение не является мистическим предугадыванием сигнала, а означает лишь местный эффект коррекции фазы в узком частотном диапазоне.

Система будет устойчивой, если в области пересечения амплитудно-частотной характеристикой оси абсцисс запаздывание по фазе не будет превышать 180°, причем, чем меньше это запаздывание, тем выше запас устойчивости. При приближении к величине 180° система характеризуется недостаточным высоким качеством переходного процесса, то есть перерегулирование превышает допустимую величину. Действительно, запаздывание на величину 180° порождает инвертирование сигнала, $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$. Поэтому отрицательная обратная связь фактически в области этих частот становится положительной. Естественно, что если при этом коэффициент усиления этих частот больше единицы, то система теряет устойчивость.

Таким образом, в той области частот, где собственная амплитудно-частотная характеристика объекта достигает 180°, усиление контура без дополнительных мер не может быть сделано больше единицы: с учетом необходимого запаса устойчивости, оно должно быть меньше 0,5. Для расширения полосы

частот системы может быть применен дифференцирующий тракт регулятора. Он должен уменьшить запаздывание по фазе именно в этой области частот. Возможности этого метода ограничены, поэтому коэффициент усиления повысить за счет дифференцирования удается не очень сильно.

Для минимально-фазовых систем можно сказать, что дифференцирующий тракт уменьшает наклон логарифмической амплитудно-частотной характеристики в области, где она близка к нулю. В идеале она не должна достигать двойного наклона минус сорок децибел на декаду. Асимптотическая характеристика может иметь только целый наклон минус двадцать, минус сорок децибел на декаду и так далее.

Идея использования некруглого дифференцирования состоит в том, что предлагается обеспечить промежуточный наклон, между двадцатью и сорока децибелами на декаду. На *Рис. 22* показаны амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики.

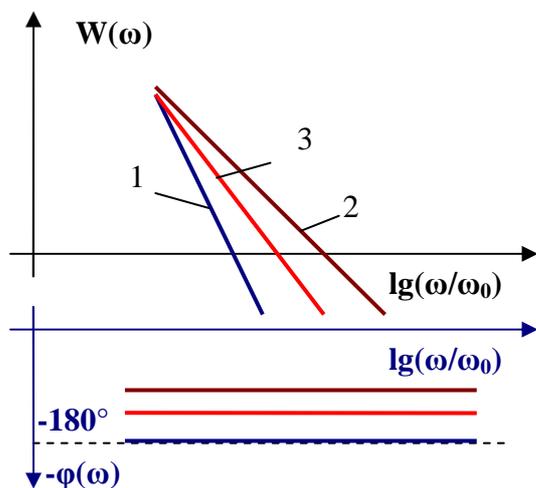


Рис. 22. Идея применения неполного дифференцирования, отображенная на амплитудно-частотных и фазочастотных характеристиках: 1 – двойной наклон, качество системы неудовлетворительное, 2 – одинарный наклон, запас качества избыточный, 3 – полуторный наклон минус тридцать децибел на декаду, запас устойчивости оптимален

В данной идее не учтен тот факт, что реальные амплитудно-частотные характеристики отличаются от асимптотических тем, что они не состоят из отрезков прямых, а являются гладкими функциями. На *Рис. 23* показаны не асимптотические, а реальные характеристики. Видно, что существуют участки, на которых наклон занимает любое промежуточное значение. Аналогично на фазовых характеристиках имеются значения любой величины угла запаздывания.

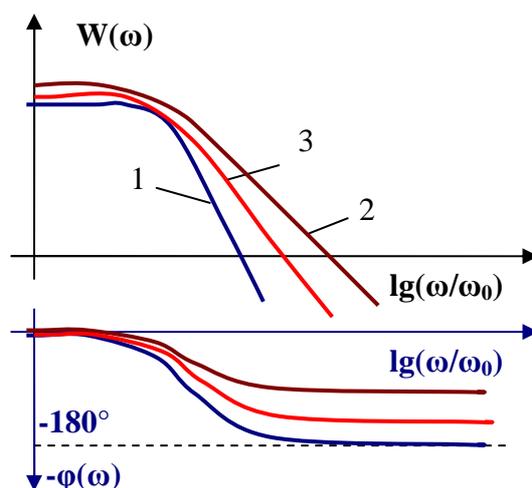


Рис. 23. Корректное отображение идеи применения неполного дифференцирования: 1 – двойной наклон, 2 – одинарный наклон, 3 – полуторный наклон

Обратим внимание на *Рис. 17*, где видно, что половинный наклон минус десять децибел на декаду достигается последовательным чередованием нулевого и однократного наклона. Соответственно, полуторный наклон может быть достигнут чередованием однократного и двукратного наклонов.

Наряду с многократным изменением наклона за счет множества изломов, можно достичь такого же результата в точке пересечения характеристики с осью за счет единственного излома. Существует два варианта такого наклона, как показано на *Рис. 24*.

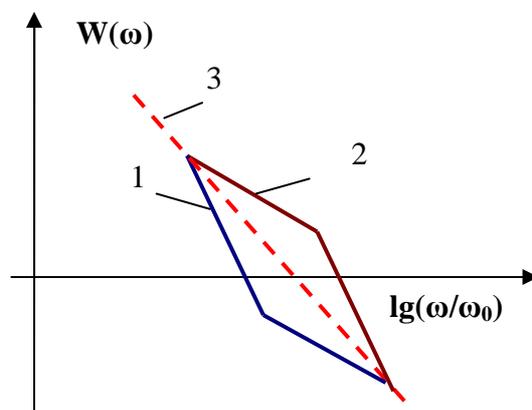


Рис. 24. Возможный вид асимптотических частотных характеристик (1 и 2) при среднем полуторном наклоне реальной характеристики (3)

Вариант номер один состоит в том, что частотная характеристика пересекает ось абсцисс под двукратным наклоном, а далее этот наклон уменьшается до однократного. В варианте номер два частотная характеристика пересекает ось абсцисс под однократным углом, а далее наклон становится двукратным. Первый вариант демонстрирует, по-видимому, не лучшее решение. Амплитудно-частотная характеристика объекта, как правило, характеризуется нарастающим наклоном по

мере роста частоты. Если регулятор позволяет снизить наклон, то, как правило, с ростом частоты это сделать труднее. Поэтому второй вариант отображает более вероятную ситуацию. В случае первого варианта, по-видимому, коэффициент усиления тракта можно дополнительно повысить, что позволит расширить полосу системы.

2.2. В чем смысл уменьшения порядка дифференцирования до дробной величины

Желание ограничить дифференцирование может быть обосновано опытом или моделированием, которое показывает, что в дифференцировании содержится определенная опасность отрицательного влияния на поведение системы. Амплитудно-частотная характеристика идеального дифференцирующего устройства, показанная на *Рис. 7*, неограниченно возрастает с ростом частоты. Полезное действие дифференцирующего устройства ограничено частотной областью, в которой амплитудно-частотная характеристика расположена вблизи оси абсцисс, после того как эта характеристика углубляется ниже 15 дБ и более, значение фазочастотной характеристики практически не влияет на устойчивость системы. Поэтому дальнейшее дифференцирование не приносит никакой пользы.

Вредное влияние дифференцирования может проявляться в чрезмерном усилении шумов сигнала обратной связи.

Другая причина отрицательного влияния дифференцирования может состоять в излишнем увеличении того участка амплитудно-частотной характеристики контура, в котором фазовый сдвиг уже настолько велик, что дифференцирование не исправляет ситуацию. Это особенно характерно для объектов высокого порядка и для объектов с запаздыванием.

Неполное дифференцирование может устранить перечисленные выше проблемы.

Другой и, возможно, более эффективный путь устранения этих проблем состоит в ограничении области дифференцирования, как показано на *Рис. 10, 12 и 13*.

2.3. Соотношение между количеством новых элементов и числом степеней свободы регулятора

Нетрудно заметить, что в ПИД-регуляторе по уравнению (1) имеется три независимых коэффициента. Это дает три степени свободы для обеспечения преобразования исходной характеристики объекта в желаемую характеристику системы. В регуляторе по уравнению (2) добавляется две степени свободы – величины λ и μ , то есть наклоны характеристик, или степени при s в числителе и

в знаменателе. Общее количество степеней свободы этого регулятора – пять.

При реализации регуляторов в структуре используется намного больше параметров. Например, при реализации неполного дифференцирования в соответствии с графиком, показанным на *Рис. 19*, используется семь параметров: общий коэффициент усиления и шесть точек излома. То же самое можно сказать про неполный интегратор по *Рис. 17*. Итого для реализации регулятора по уравнению (2) в этом случае будет использована структура, в которой следует вычислить и реализовать пятнадцать регулировочных параметров: один на пропорциональный тракт и по семь на неполный интегратор и неполное дифференцирующее устройство.

Таким образом, налицо дисбаланс между фактическим числом параметров настройки, пятнадцать, и степенью свободы регулятора, равной пяти.

Возможности регулятора тем выше, чем больше количество степеней свободы.

Так у простого пропорционального регулятора лишь одна степень свободы – коэффициент усиления. У чисто интегрирующего регулятора также лишь одна степень свободы, поэтому он эффективнее, чем только пропорциональный или только интегральный регулятор. ПИД-регулятор добавляет одну степень свободы и поэтому эффективней ПИ-регулятора.

Если ПИ ^{λ} Д ^{μ} -регулятор дает семь степеней свободы, естественно, что его применение позволяет более эффективно управлять объектом, то есть достичь лучшего соотношения быстродействия (полосы частот) и качества управления. Это следует хотя бы из того факта, что ПИД-регулятор является частным случаем ПИ ^{λ} Д ^{μ} -регулятора при $\lambda = \mu = 1$. Однако при реализации этого регулятора используется в наших оценках пятнадцать регулировок, или точнее $1+2M$, где M – количество элементов при аппроксимации неполного дифференцирования и неполного интегрирования. Все эти параметры, теоретически, могли бы быть изменены для достижения наилучших свойств системы. При использовании метода дробно-степенных регуляторов большая часть этих параметров связана определенными соотношениями, так что свободно изменяться могут только пять параметров.

Из сказанного следует, что дробно-степенные регуляторы при их приближенной реализации указанным методом структура регулятора излишне сложна по отношению к возможностям, предоставляемым этим регулятором. Например, регулятор с пятью параметрами, асимптотическая амплитудно-частотная характеристика которого показана на

Рис. 25, по структуре будет проще, чем ПИ^λД^μ-регулятор, например, с пятнадцатью параметрами, но при этом может дать соизмеримые возможности для достижения лучшего качества, как и этот ПИ^λД^μ-регулятор, поскольку в нем также имеется пять степеней свободы, как видно из Рис. 26. Вопрос о том, какой из указанных регуляторов более эффективен для конкретного объекта, следует решать конкретным экспериментом (например, моделированием и оптимизацией).

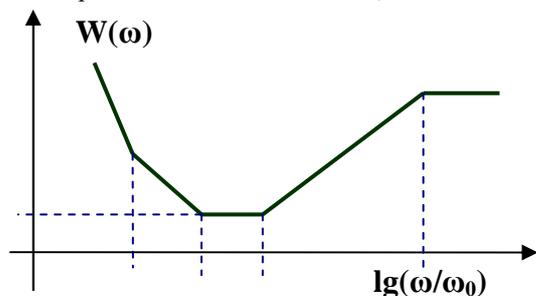


Рис. 25. Регулятор с пятью степенями свободы: четыре точки излома и один общий коэффициент (наклоны фиксированы и кратны 20 дБ/дек)

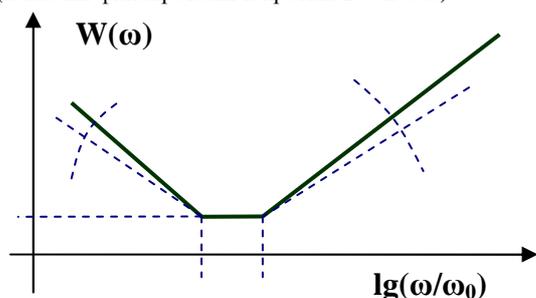


Рис. 26. Регулятор с пятью степенями свободы: общий коэффициент, две точки излома и два угла наклона

2.4. Зачем в регуляторе интегрирующий тракт

Ошибка в системе регулирования обратно пропорциональна коэффициенту усиления. Это следует из основного соотношения для замкнутых систем. Это справедливо и для любого отдельного участка частотной характеристики. Рассмотрим контур первого порядка, частотная характеристика которого показана на Рис. 27. Частота ω_1 пересечения характеристик оси абсцисс является частотой единичного усиления, или полосой частот системы. Помеха, действующая на этой или на более высокой частоте, не будет ослабляться действием контура. Если частота помехи в N раз меньше этой частоты, то ее действие будет ослаблено в N раз при условии, что эта частота не меньше, чем ω_3 . При дальнейшем снижении частоты ослабление помехи не будет увеличиваться. Если коэффициент статического усиления системы равен K_0 , и если на систему действует постоянная помеха величиной H , то статическая ошибка будет равна $E_0 = H / K_0$.

Например, если при комнатной температуре (+25°C) система стабилизации температуры стремится поддерживать температуру, равную +10°C, и в системе статический коэффициент равен 1000, то статическая ошибка будет равной 0,015°C, то есть реальная температура будет больше на эту величину, если пренебречь другими источниками погрешности, такими как погрешность датчика и т. п.

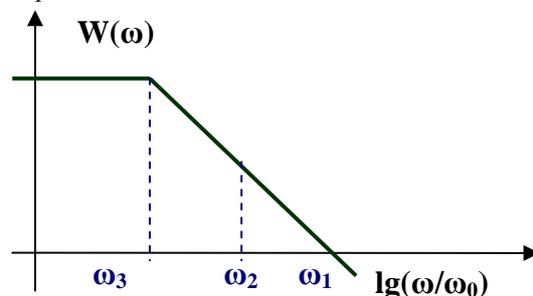


Рис. 27. Пример амплитудно-частотной характеристики разомкнутого контура системы

Введение интегрирующего тракта в систему позволяет обеспечить неограниченное возрастание амплитудно-частотной характеристики с уменьшением частоты. Это означает, что статическая ошибка будет строго равной нулю, и все погрешности системы будут порождены лишь другими причинами, такими, как статическая погрешность датчика и т. п.

2.5. Достаточен ли в регуляторе интегрирующий тракт первого порядка

Устранение статической ошибки достаточно для большинства систем регулирования. Достоверно существуют задачи, где регулятор первого порядка не достаточен. К таким задачам относится большинство задач фазовой автоматической подстройки частоты, ряд задач частотной автоподстройки, задачи высокоточного слежения за быстроизменяющейся величиной. Без интегрирования второго порядка невозможно было бы создать систему автоматического слежения за фокусом и за дорожкой в оптическом дисковом запоминающей устройстве.

Рассмотрим простой пример. В системе стабилизации частоты лазерного излучения полоса частот может составлять, например, 10 КГц. Если наклон амплитудно-частотной характеристики с уменьшением частоты не растет и составляет двадцать децибел на декаду, то помеха на частоте 1 Гц будет подавляться лишь в 10000 раз. Изначальная нестабильность частоты лазера составляет $1-10 \cdot 10^6$ Гц. Подавление этой помехи до величины не более 1 Гц будет обеспечено лишь на частоте 0,001 Гц. Это означает, что нестабильность частоты лазера в пределах заданной ошибки будет достигнута лишь за 1000 с, на меньших

интервалах нестабильность будет больше. Для He-Ne лазера с частотой излучения порядка 10^{14} Гц, таким образом, будет обеспечена нестабильность на уровне 10^{-14} лишь за 1000 с, то есть примерно за 16,6 мин.

Этого явно недостаточно. В настоящее время требуются стабильные лазерные стандарты частоты с нестабильностью порядка 10^{-18} и меньше. Следовательно, рост амплитудно-частотной характеристики разомкнутого контура с уменьшением частоты должен в ряде случаев происходить более резко, чем это обеспечивается интегратором первого порядка. В ряде конкретных задач требовался трехкратный наклон, то есть наклон под углом 60 дБ/дек. Частотная характеристика, показанная на Рис. 25, обеспечивает двойной наклон 40 дБ/дек. Характеристика, показанная на Рис. 26, этого обеспечить не может.

2.6. Какие факторы сдерживают увеличение наклона регулятора в области низких частот

Использование наклона второго и более высоких порядков обеспечивает более быстрый рост частотной характеристики с уменьшением частоты, что является положительным свойством. Но, как отмечалось выше, увеличение наклона связано с увеличением запаздывания по фазе соответствующего участка фазочастотной характеристики. С позиции устойчивости допускается запаздывание на величину больше 180° в области, далеко отстоящей от точки пересечения этой характеристики с осью абсцисс. Но если такой большой наклон начинается достаточно близко к частоте единичного усиления, он отрицательно повлияет на запас устойчивости по фазе, то есть принесет большой фазовый сдвиг. Этот фактор сдерживает применение большого наклона низкочастотной части. Но если начало этого большого наклона отстоит от частоты единичного усиления на достаточную величину, например, на две-три декады, то влияние этого участка на устойчивость системы может быть снижено до требуемого малого значения.

Таким образом, излом низкочастотной части амплитудно-частотной характеристики разомкнутого контура от первого порядка до второго и более высокого вполне допустим, если он сделан достаточно далеко от частоты единичного усиления. Критерием достаточности удаленности этого излома может служить использование любого способа анализа устойчивости, включая численное моделирование переходных процессов.

2.7. Как должна выглядеть идеальная частотная характеристика разомкнутого контура

Для минимально-фазовой системы идеальный вид амплитудно-частотной характеристики разомкнутого контура регулирования показан на Рис. 28.

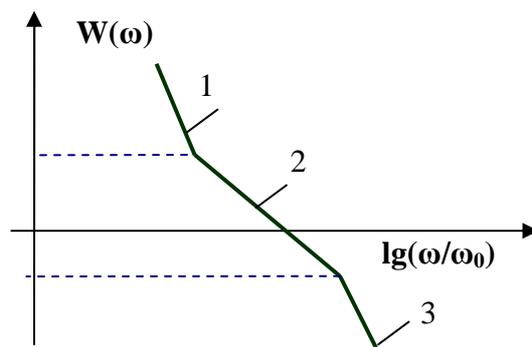


Рис. 28. Идеальный вид амплитудно-частотной характеристики разомкнутого контура минимально-фазовой системы

Участок 1 имеет двойной наклон и обеспечивает быстрое возрастание характеристики с уменьшением частоты. Этот участок может длиться влево без ограничений, или после достижения заданной величины изменять наклон до однократного или даже до нулевого. Как правило, обеспечение требуемого вида низкочастотной части этой характеристики не является технической проблемой. Однако, следует заметить, что выбор метода дробно-степенного ПИД-регулятора ограничивает возможности изменения этого наклона величиной λ , примерно равной единице (но не в точности).

Участок 2 обеспечивает устойчивость системы. Наклон асимптотической характеристики рекомендуется в этой области однократным, равным минус двадцать децибел на декаду, но вследствие близости участка 3 (и частично участка 1) этот наклон на практике будет выше. Это можно использовать, обеспечивая тот наклон, который будет больше однократного, но меньше двукратного, и поэтому переходный процесс будет не слишком затянут, но и без излишнего перерегулирования.

Участок 3 задан особенностями объекта, частично на этом участке наклон может быть уменьшен за счет дифференцирующего тракта, но эти возможности ограничены.

Если объект содержит звено запаздывания, то участок 2 следует продлить за счет сокращения участка 3, поскольку в контуре имеется дополнительный источник сдвига фаз, влияние которого не сказывается на амплитудно-частотной характеристике.

2.8. Каким должен быть идеальный регулятор

Модель объекта в виде его амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик, задана внешними обстоятельствами и не может

быть изменена. Регулятор должен позволит преобразовать эти характеристики в те, которые требуются с позиции идеальной системы, то есть к виду, показанному на *Рис. 28* или несколько отличающемся от него (в зависимости от возможностей и предпочтений разработчиков).

3. ПРИМЕРЫ

3.1. Результаты из литературы

В статье [6] приведен пример расчета дробно-степенного регулятора для объектов следующего вида:

$$W_{O1}(s) = \frac{16,5}{10s + 1} e^{-0,5s}, \quad (9)$$

$$W_{O2}(s) = \frac{1}{s + 1} e^{-0,1s}. \quad (10)$$

Для объекта (9) рассчитан следующий регулятор:

$$W_{RF0}(s) = 0,3503 + \frac{3,4845}{s^{0,8}} + 2,2476s^{0,7}. \quad (11)$$

Для объекта (10) рассчитаны три регулятора:

$$W_{RF1}(s) = 0,5021 + \frac{0,4892}{s^{1,4198}} + 0,2045s^{1,0189}, \quad (12)$$

$$W_{RF2}(s) = 1,3012 + \frac{1,2589}{s^{1,1230}} - 1,2601s^{0,1533}, \quad (13)$$

$$W_{RF3}(s) = 12 + \frac{60}{s} + 0,6s. \quad (14)$$

В статье приведены переходные процессы в системах с использованием дробно-степенного регулятора. Вид этих процессов показан на *Рис. 29* и *30*.

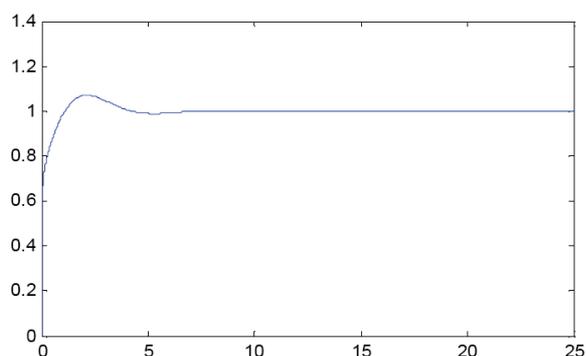


Рис. 29. Переходные процессы в системе с объектом (9) и регулятором (11), рассчитанные в статье [6]

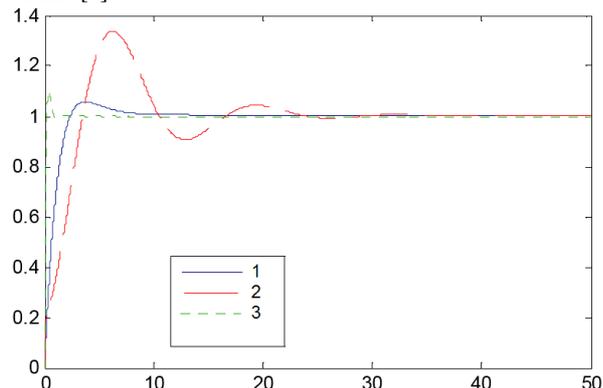


Рис. 30. Переходные процессы в системе с объектом (10) и регуляторами (12), (13) и (14) (кривые 1, 2 и 3), рассчитанные в статье [6]

Отсутствие запаздывания в графиках дают основание усомниться в корректности моделирования.

3.2. Результаты моделирования и оптимизации в программе VisSim

Рассмотрим первый пример, объект (9). Моделирование для оптимизации ПИД-регулятора выполнено по схеме, показанной на *Рис. 31*.

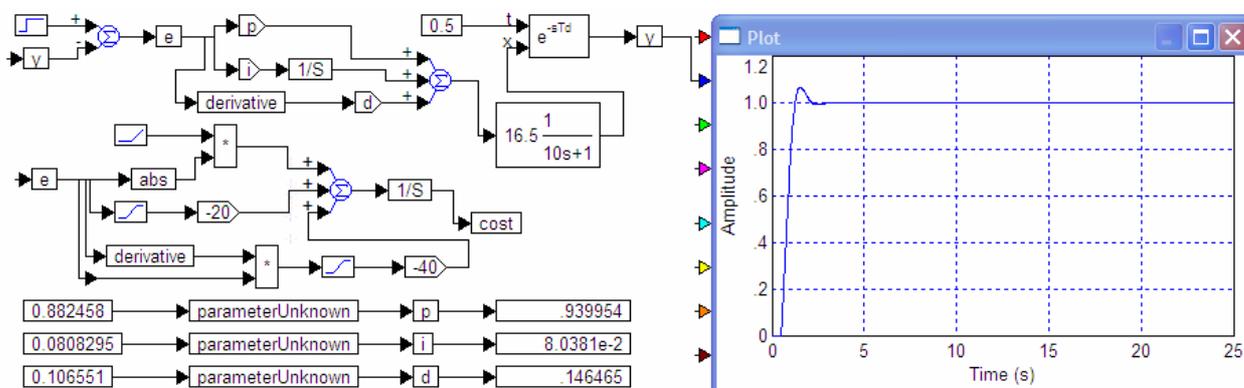


Рис. 31. Структурная схема для моделирования системы и оптимизации ПИД-регулятора в системе с объектом (9)

В результате оптимизации получен регулятор следующего вида:

$$W_R(s) = 0,9399 + \frac{8,038}{s} + 0,14656s. \quad (15)$$

Параметры регулятора можно округлить до трех значащих цифр, переходный процесс от этого изменяется незначительно, что проверено моделированием. Детально переходный процесс показан на *Рис. 32*. Как видим, при моделировании имеет место запаздывание в

полном соответствии с величиной запаздывания объекта. В системе длительность переходного процесса составляет менее 2,5 с. Перерегулирование менее 10%. В продемонстрированном примере на Рис. 29 перерегулирование приблизительно имеет то же значение, длительность переходного процесса составляет около 7,5 с.

Таким образом, для объекта (9) вовсе не требуется дробно-степенной ПИД-регулятор, с обычным ПИД-регулятором результаты получаются не хуже. При этом вопрос корректности получения переходного процесса, показанного на Рис. 29, остается под вопросом.

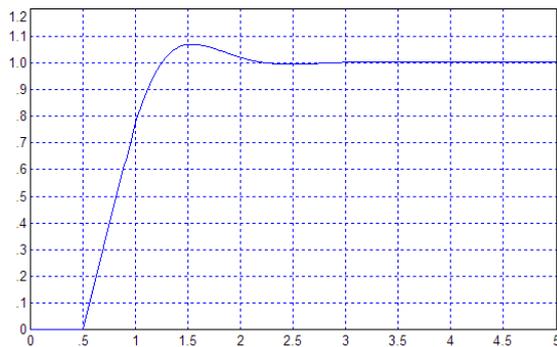


Рис. 32. Переходный процесс в системе с объектом (9) и регулятором (15)

Рассмотрим первый пример, объект (10). Моделирование системы с регулятором (14) дает результат, показанный на Рис. 33, который существенно отличается от того, который показан на Рис. 30 линией 3. На графике, приведенном в статье [6] (Рис. 30, линия 3) перерегулирование не превышает 10%. Длительность процесса составляет около 2 с. Результат моделирования, показанный на Рис. 33, демонстрирует длительность процесса 1 с, перерегулирование более 70 %.

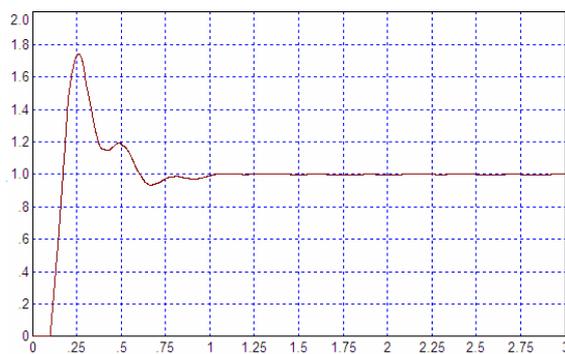


Рис. 33. Переходный процесс в системе с объектом (10) и регулятором (14)

В результате оптимизации получен следующий регулятор:

$$W_R(s) = 8,32 + \frac{6,23}{s} + 0,384s \quad (16)$$

Получаемый переходный процесс показан на Рис. 34.

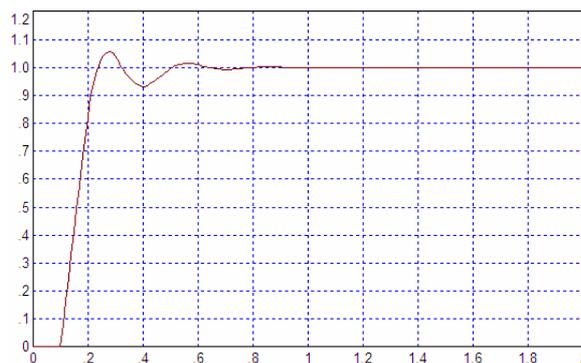


Рис. 34. Переходный процесс в системе с объектом (10) и регулятором (16)

Отметим, что длительность переходного процесса в итоге составляет менее 1 с, перерегулирование не превышает 5%. Это лучший результат в сравнении со всеми представленными в статье [6] графиками переходных процессов для этого объекта. Действительно, достаточно сравнить этот график с графиками, показанными на Рис. 30 с учетом того, что верный вид графика 3 для этого случая дан на Рис. 33. При сравнении графиков следует учесть разный масштаб по оси времени: на Рис. 30 общая длительность графиков составляет 50 с, на Рис. 33 она равна 3 с, на Рис. 34 – только 2 с.

Отметим, что в рассмотренных выше примерах их статьи [6] модели объекта (9) и (10) не представляют особой сложности для расчета регулятора. Наибольшую проблему представляют объекты высоких порядков и запаздывание, соизмеримое с постоянной времени объекта. В указанных примерах порядок неминимально-фазовой части модели объекта – первый. Величина запаздывания в 10–20 раз меньше чем постоянная времени знаменателя. Поэтому рассмотренные примеры могут показаться неубедительными.

Покажем, что рассмотренный метод оптимизации ПИД-регулятора достаточно эффективен для более сложных объектов.

Рассмотрим объект следующего вида:

$$W_{O3}(s) = \frac{1}{s+1} e^{-0,5s} \quad (17)$$

Здесь постоянная времени звена запаздывания только вдвое меньше постоянной времени объекта. Для этого случая получен регулятор следующего вида:

$$W_R(s) = 2,04 + \frac{1,20}{s} + 0,461s \quad (18)$$

Полученный переходный процесс показан на Рис. 35. Длительность переходного процесса составляет 4 с, перерегулирование не превышает 5%.

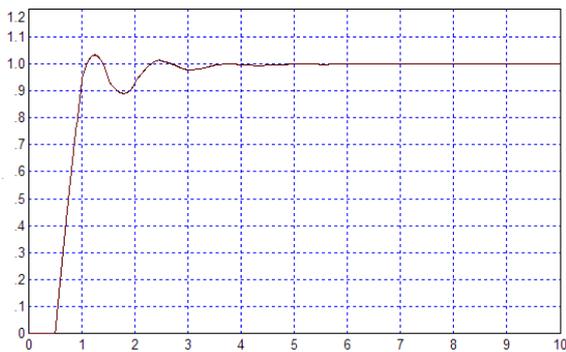


Рис. 35. Переходный процесс в системе с объектом (17) и регулятором (18)

Рассмотрим объект следующего вида:

$$W_{O4}(s) = \frac{1}{s + 2s^2 + 1} e^{-0.5s}. \quad (19)$$

Для этого случая получен регулятор следующего вида:

$$W_R(s) = 1,25 + \frac{0,414}{s} + 1,199s. \quad (20)$$

Полученный переходный процесс показан на Рис. 36. Длительность переходного процесса составляет 10 с, перерегулирование отсутствует.

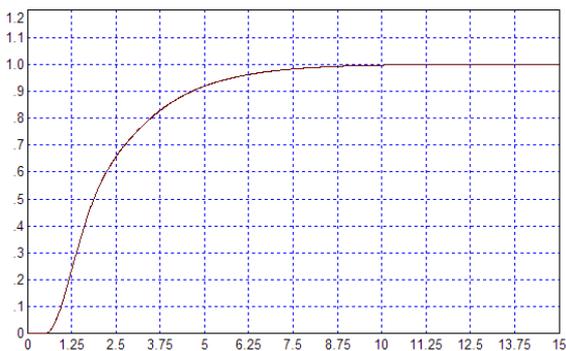


Рис. 36. Переходный процесс в системе с объектом (19) и регулятором (20)

Увеличим запаздывание еще вдвое. Рассмотрим объект следующего вида:

$$W_{O4}(s) = \frac{1}{s + 2s^2 + 1} e^{-s}. \quad (21)$$

Оптимизация дает регулятор следующего вида:

$$W_R(s) = 1,3666 + \frac{0,406}{s} + 1,1927s. \quad (22)$$

Полученный переходный процесс показан на Рис. 37. Длительность переходного процесса составляет 10 с, перерегулирование отсутствует.

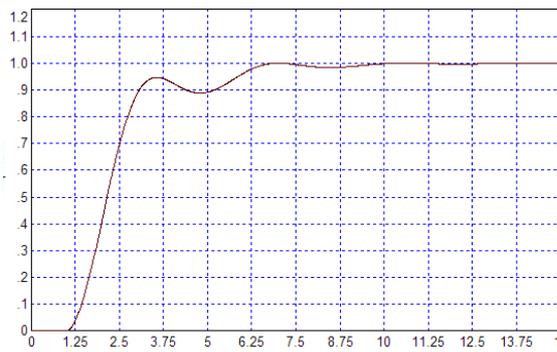


Рис. 37. Переходный процесс в системе с объектом (21) и регулятором (22)

Увеличим запаздывание еще вдвое. Рассмотрим объект следующего вида:

$$W_{O4}(s) = \frac{1}{s + 2s^2 + 1} e^{-2s}. \quad (23)$$

Оптимизация дает регулятор следующего вида:

$$W_R(s) = 0,803 + \frac{0,258}{s} + 0,749s. \quad (24)$$

Полученный переходный процесс показан на Рис. 38. Длительность переходного процесса составляет 12 с, перерегулирование пренебрежимо мало (менее 2 %).

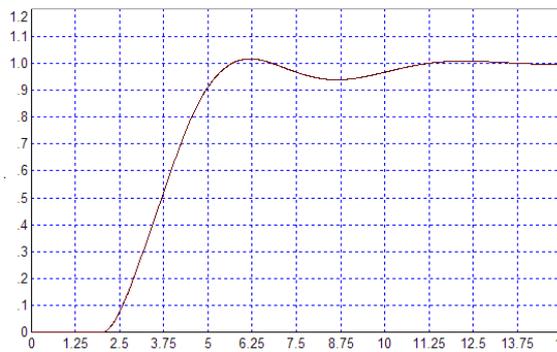


Рис. 38. Переходный процесс в системе с объектом (23) и регулятором (24)

Увеличим запаздывание еще вдвое и рассмотрим объект вида:

$$W_{O4}(s) = \frac{1}{s + 2s^2 + 1} e^{-4s}. \quad (25)$$

Оптимизация дает регулятор следующего вида:

$$W_R(s) = 0,558 + \frac{0,15}{s} + 0,71s. \quad (26)$$

Полученный переходный процесс показан на Рис. 39. Длительность переходного процесса составляет 20 с, перерегулирование практически отсутствует.

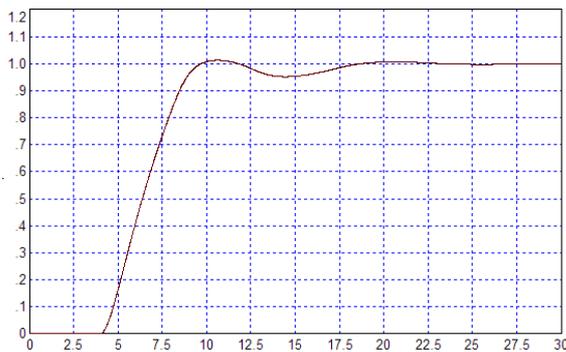


Рис. 39. Переходный процесс в системе с объектом (25) и регулятором (26)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, моделирование и численная оптимизация продемонстрировали, что этим путем можно синтезировать более простые регуляторы, обеспечивающие лучшую точность и более качественные переходные процессы (следовательно, и лучшую динамическую точность), чем регуляторы, предложенные в работе [4]. В итоге достигнуто как упрощение регулятора, так и его улучшение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Chen, Y.Q., Vinagre, B.M. and Monje, C.A.* A Proposition for the Implementation of Non-integer PI Controllers. The Thematic Action 'Systems with Non-integer Derivations' LAP-ENSEIRB, Bordeaux, France, 2003.

[2] *Leu, J.F., Tsay, S.Y. and Hwang, C.* Design of Optimal Fractional Order PID Controllers. Journal of the Chinese Institute of Chemical Engineers 33:2, 2002.

[3] *Podlubny, I.* Fractional Order Systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers. IEEE Transactions on Automatic Control 44:1, 1999, pp. 208-214.

[4] *Bettoua, K. and Charef, A.* Control quality enhancement using fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller. International Journal of Systems Science Vol. 40, No. 8, 2009, pp. 875-888.

[5] *Жмудь В.А., Заворин А.Н.* Дробно-степенные ПИД-регуляторы и пути их упрощения с повышением эффективности управления. Автоматика и программная инженерия. 2013. № 1 (3). С. 30–36. ФБГОУ ВПО НГТУ (Новосибирск, Россия).

[6] *Zhe Yan, Kai Li.* Tuning and application of fractional order PID controllers. Proceedings of 2-nd International Conference on Measurements, Information and Control (ICMIC-2013). Harbin. China. P. 955–958.



Вадим Жмудь – заведующий кафедрой Автоматики в НГТУ, профессор, доктор технических наук, автор 200 научных статей., главный научный сотрудник Института лазерной физики СО РАН. Область научных интересов и компетенций – теория автоматического управления, электроника, измерительная техника.

E-mail: oaonips@bk.ru



Александр Заворин, аспирант кафедры Автоматики НГТУ, автор более 10 научных статей. Область научных интересов и компетенций – теория автоматического управления, оптимальные и адаптивные системы, оптимизация, многоканальные системы.

E-mail: pisatel1987@mail.ru