

# Исследование погрешности восстановления сигнала по результатам его преобразования

Вадим Жмудь<sup>1</sup>, Вольфрам Хардт<sup>2</sup>

<sup>1</sup>НГТУ, Новосибирск, Россия, <sup>2</sup>Университет Хемница, Хемниц, Германия

**Аннотация:** Традиционно считается, что при использовании аналого-цифрового преобразования следует соблюдать требования теоремы Котельникова (Шеннона и Найквиста по англоязычной литературе). Согласно этой теореме частота преобразования должна, как минимум, вдвое превышать верхнюю граничную частоту спектра преобразуемого сигнала. Также традиционно считается, что наличие высокочастотных шумов более одного кванта преобразования по уровню крайне неблагоприятно влияет на результат преобразования. Из этого следует необходимость предварительной фильтрации сигнала до начала преобразования по условиям этого соотношения. В данной статье путем моделирования в программе *VisSim* показано, что условия указанной теоремы недостаточны более чем на порядок. Вместе с тем показано, что влияние высокочастотных шумов намного меньше сказывается на погрешности преобразования, нежели влияние недостаточности частоты преобразования. Кроме того, это влияние шумов также достаточно сильно ослабляется за счет увеличения частоты преобразования. На этом основании обоснованы рекомендации увеличить требование указанной теоремы, как минимум, в 25 раз, то есть требовать 50-кратного превышения частоты преобразования над верхней граничной частотой входного сигнала.

**Ключевые слова:** преобразование сигналов, АЦП, теорема Котельникова, теорема Шеннона, частота Найквиста, моделирование, погрешность

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при применении АЦП необходимо выполнение условий теоремы Котельникова (в иностранной литературе также встречается название «теорема Шеннона» или «теорема Котельникова-Шеннона», «теорема отсчетов»).

Ее суть состоит в том, что непрерывный сигнал с ограниченным спектром можно абсолютно точно представить набором его отдельных значений («отсчетов»), следующих с равными интервалами, при условии, что частота следования этих отсчетов, как минимум, вдвое

превышает верхнюю границу спектра указанного сигнала.

Введем термины. Верхняя (граничная) частота спектра сигнала  $f_B$  – это та частота, выше которой никаких компонент в спектре сигнала не содержится. Само значение этой частоты может содержаться в спектре, но с пренебрежимо малой амплитудой.

**Теорема Котельникова для АЦП:** на один период  $T_B$  верхней частотной границы  $f_B = 1 / T_B$  спектра преобразуемого сигнала должно приходиться не менее двух отсчетов АЦП. То есть частота квантования  $f_K$  должна, как минимум, вдвое превышать верхнюю частоту сигнала  $f_B$ :

$$f \geq f_B \Rightarrow S(f) = 0 \Rightarrow f_K \geq 2f_B. \quad (1)$$

В этой записи знаки неравенства должны быть **одинаковыми**, а именно, допустима и такая запись:

$$f > f_B \Rightarrow S(f) = 0 \Rightarrow f_K > 2f_B. \quad (2)$$

Требования, сформулированного теоремой Котельникова лишь **теоретически** достаточно для восстановления сигнала по оптимальному правилу и лишь применительно к идеализированному сигналу (с ограниченным спектром), который в природе не встречается.

Во-первых, конечный (ограниченный) спектр может характеризовать лишь бесконечный во времени сигнал. Во-вторых, само значение отсчетов должно быть взято с наивысшей точностью (идеально). В-третьих, на практике невозможна ситуация, чтобы при некоторой частоте квантования  $F_1$  сигнал можно восстановить идеально, а при частоте на любую сколь угодно малую величину  $\delta F$  больше эта задача была неразрешимой. Кроме того, процедура восстановления исходного сигнала по его отсчетам никогда не бывает оптимальной. Поэтому на практике рекомендуется использовать заведомо большую частоту квантования по времени (частоту взятия отсчетов).

В работе [2] рекомендуется увеличивать частоту квантования по сравнению с требованием теоремы Котельникова в  $k = 1,5-2$  раза. Эта рекомендация не подкреплена экспериментально, поэтому может быть поставлена под сомнение.

В данной статье осуществляется исследование с целью отыскания обоснованного

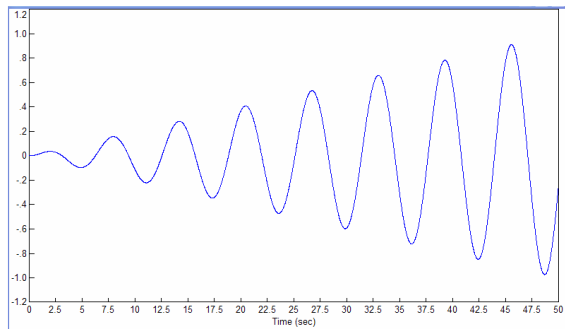
значения коэффициента  $k$ , т. е. отыскивается обоснованное значение соотношения между верхней границей спектра преобразуемого сигнала и частотой его преобразования.

### 1. СУТЬ МОДЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

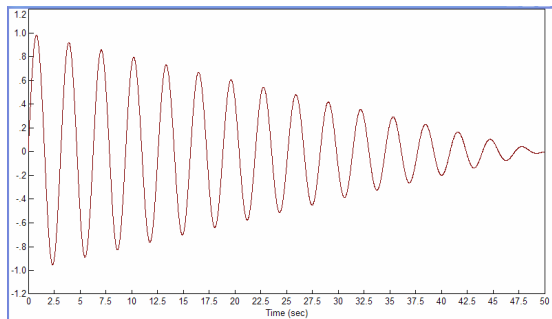
Требования теоремы Котельникова нельзя понимать буквально. Ошибкой было бы думать, что обеспечение условий соотношения (1) или (2) обеспечивает достаточно точное преобразование аналогового сигнала (т. е. его последующее восстановление в цифровом виде с достаточно малой погрешностью). На деле прагматический подход, состоящий в предположении, что частота квантования должна в десять и более раз превышать верхнюю границу частотного спектра входного сигнала дает лучшие результаты, поскольку преобразуемый сигнал не бесконечен во времени, метод фильтрации и метод восстановления не оптимален, и т. д.

Для наглядности осуществим моделирование преобразования сигнала в программе *VisSim*.

Поскольку чисто гармонический сигнал преобразовывать не интересно, можно при этом упустить некоторые тонкости, будем преобразовывать сумму двух квазигармонических сигналов. Вид этих сигналов показан на *Рис. 1* и *2*.



*Рис. 1.* Квазигармонический сигнал с линейно нарастающей амплитудой, частота равна  $1 \text{ rad/s}$

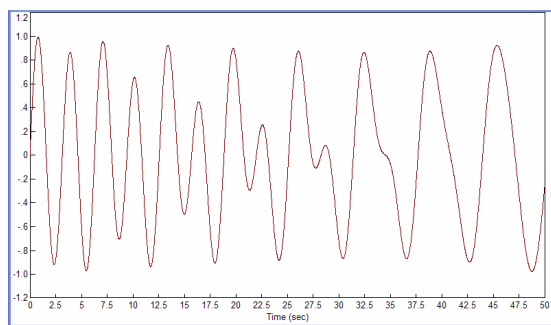


*Рис. 2.* Квазигармонический сигнал с линейно ниспадающей амплитудой, частота равна  $2 \text{ rad/s}$

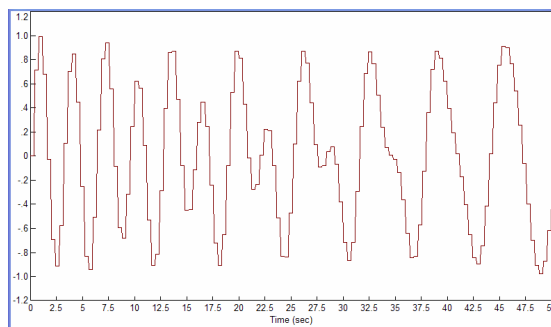
Период самой высокой частоты в этом сигнале примерно можно считать равным  $3 \text{ с}$ . Исходя из этих условий, преобразование с периодом  $1,4 \text{ с}$  отвечает требованиям теоремы.

Это в полной мере относится не только к каждому сигналу в отдельности, но и к сумме этих сигналов, которая показана на *Рис. 3*.

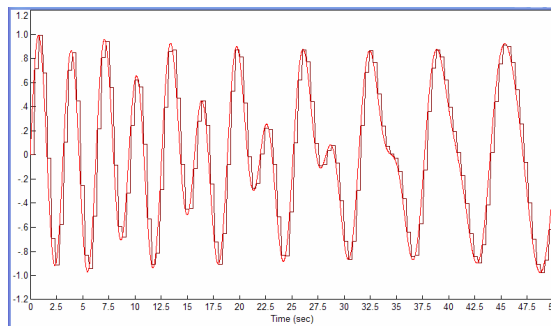
При моделировании работы АЦП вначале используем период преобразования, равный  $0,4 \text{ с}$ , чтобы на интервале, равном периоду наивысшей частоты было существенно больше, чем два отсчета. На *Рис. 4* показан результат преобразования этого сигнала, на *Рис. 5* исходный сигнал и результат преобразования объединены в одних осях для наглядности, на *Рис. 6* показана ошибка преобразования.



*Рис. 3.* Преобразуемый сигнал, являющийся суммой сигналов по *Рис. 1* и *2*



*Рис. 4.* Результат преобразования сигнала по *Рис. 3* при периоде преобразования  $0,4 \text{ с}$



*Рис. 5.* Исходный сигнал и результат его преобразования в одних осях для сравнения

Ошибка преобразования для графика на *Рис. 6* получена простым вычитанием из исходного сигнала результата его преобразования. Эта ошибка слишком велика, т. к. в пиковом значении она достигает  $70 \%$  амплитуды входного сигнала. Это объясняется не достаточно корректным сравнением результатов, что легко исправить. Операция

преобразования получает исходный сигнал и поддерживает его неизменным на протяжении всего времени до следующего преобразования, тогда как на самом деле этот отсчет относится к моменту начала ступенчатого сигнала, формируемого преобразователем.

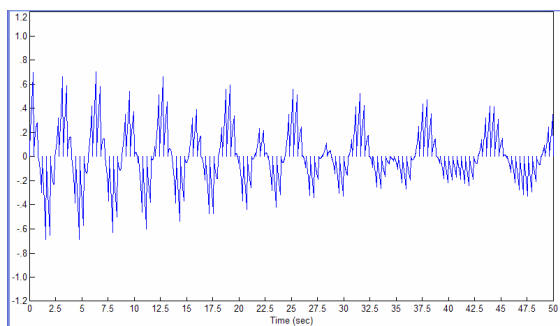


Рис. 6. Ошибка преобразования, получаемая вычитанием из исходного сигнала результата его преобразования

Следовательно, для восстановления истинной шкалы времени результат преобразования следует сдвинуть на половину периода преобразования влево, но поскольку сдвиг во времени вперед невозможен, осуществим задержку исходного сигнала на время, равное половине периода преобразования. Ошибка преобразования, вычисленная после такой коррекции, показана на Рис. 7, она явно меньше, чем ошибка, показанная ранее на Рис. 6, и все же еще слишком велика: в пиковом значении достигает 40 % амплитуды входного сигнала.

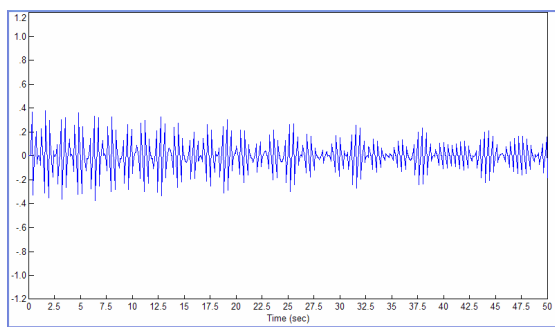


Рис. 7. Ошибка преобразования после уточнения вносимого запаздывания операцией преобразования, равного половине периода преобразования; данный результат получен путем вычитания из исходного сигнала, задержанного на 0,2 с, сигнала, полученного в результате преобразования

На Рис. 8 даны для сравнения исходный сигнал и результат преобразования после фильтрации, но без указанного сдвига.

При этом фильтр используется с передаточной функцией следующего вида:

$$W_{\phi}(s) = \frac{1}{(1 + 0,1s)^6} \quad (3)$$

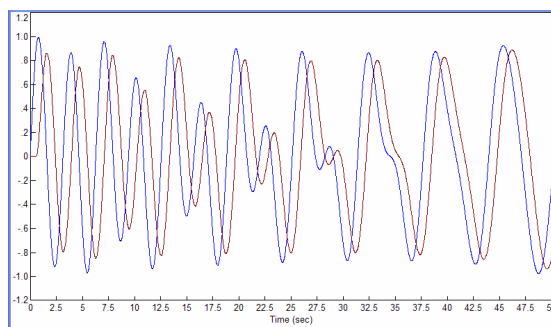


Рис. 8. Сравнение исходного сигнала и сигнала, полученного в результате преобразования и последующей фильтрации

Фильтр также вносит свое запаздывание, поэтому сравнение исходного сигнала и результата преобразования при условии, что оба эти сигнала пропущены через идентичные фильтры, все же не дает достаточного совпадения, как показано на Рис. 9. На Рис. 10 даны эти же сигналы с учетом сдвига, т. е. в исходный сигнал внесено дополнительное запаздывание на половину периода частоты преобразования. Видно, что полученные сигналы почти полностью совпадают. Ошибка преобразования – это разность этих сигналов. Она показана на Рис. 11, при этом масштаб увеличен в 20 раз. Видно, сколь мала ошибка преобразования в данном случае: в пиковом значении она достигает лишь 3% от амплитуды входного сигнала.

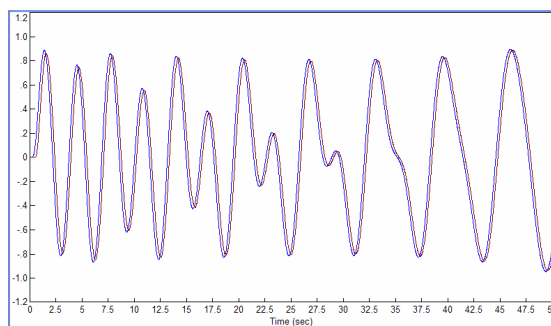


Рис. 9. Сравнение исходного сигнала и сигнала, полученного в результате преобразования после того, как оба сигнала подверглись идентичной последующей фильтрации

Хотя оставшиеся 3 % по-прежнему слишком велики, следует учесть, что примененный фильтр излишне широк для этого случая. Также далее будет показано, что свой вклад в остаточную ошибку вносит недостаточная точность моделирования, связанная с выбранным шагом интегрирования.

На Рис. 12 показан сигнал с добавлением гауссовых шумов, что применено для исследования вопроса о том, как высокочастотные шумы проявляются при преобразовании.

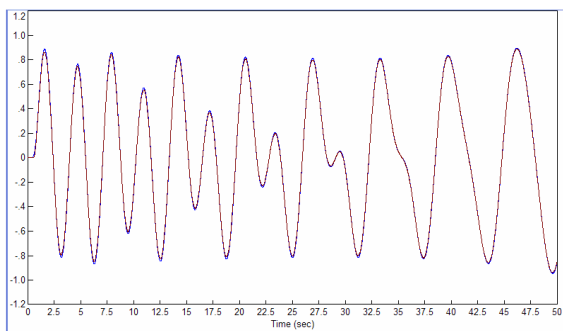


Рис. 10. То же, что на Рис. 9, с введением дополнительного запаздывания в исходный сигнал на величину 0,2 с

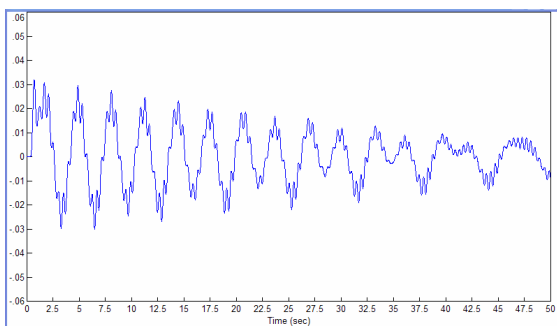


Рис. 11. Ошибка преобразования, полученная вычитанием двух графиков из Рис. 10, с последующим увеличением масштаба по оси ординат в 20 раз

Результат преобразования этого сигнала показан на Рис. 13. На Рис. 14 показана ошибка преобразования, определенная по простейшему алгоритму, то есть вычитанием преобразованного сигнала из исходного.

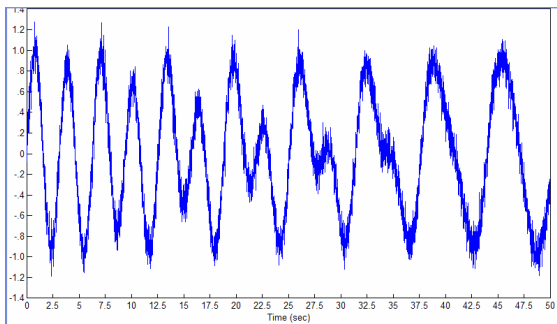


Рис. 12. Вид исходного сигнала при добавлении в него гауссовых шумов (стандартное отклонение 0,1)

На Рис. 15 даны в одних осях преобразованный сигнал, пропущенный через фильтр и исходный сигнал, пропущенный через идентичный фильтр и задержанный на половину периода преобразования. На Рис. 16 показана ошибка преобразования, вычисленная вычитанием двух сигналов из Рис. 15. После учета запаздываний, так же, как было сделано на Рис. 11, ошибка существенно уменьшается, как показано на Рис. 16.

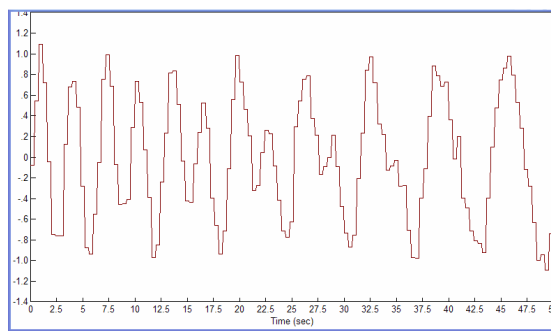


Рис. 13. Результат преобразования сигнала по Рис. 12 при тех же условиях

Покажем, что увеличение частоты преобразования эффективно снижает ошибку преобразования. На Рис. 17 показана ошибка преобразования (без фильтрации и задержки) в результате того, что частота преобразования увеличена в 4 раза. На Рис. 18 – совмещенные исходный сигнал и результат преобразования. На Рис. 19 показана ошибка после применения всех мер компенсации задержек. В пиковом значении ошибка уменьшилась в 3 раза по сравнению с результатом, показанном на Рис. 16.

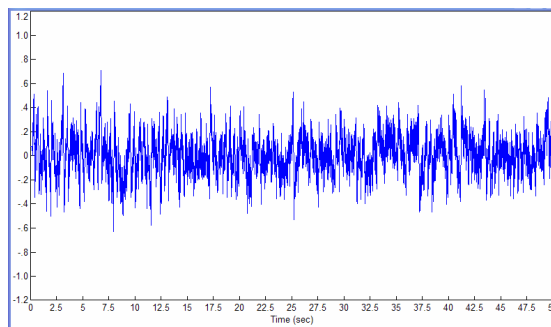


Рис. 14. Ошибка преобразования (отличие сигнала на Рис. 13 от сигнала на Рис. 12)

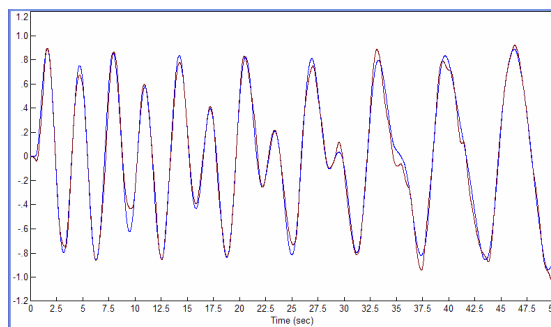


Рис. 15. В одних осях исходный сигнал, подверженный шумам, а затем пропущенный через фильтр и задержанный на 0,2 с, а также сигнал, полученный в результате преобразования, пропущенный через идентичный фильтр

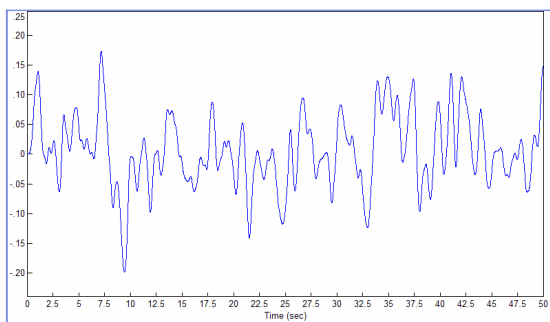


Рис. 16. Ошибка преобразования в условиях шумов, аналогично Рис. 11, масштаб увеличен только в 5 раз

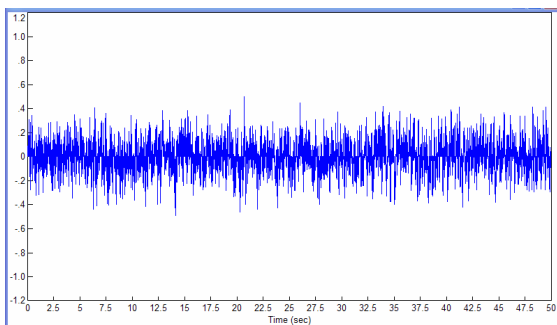


Рис. 17. Ошибка преобразования в тех же условиях по сигналу и шумам без фильтрации и задержки при увеличении частоты преобразования в 4 раза (период равен 0,1 с)

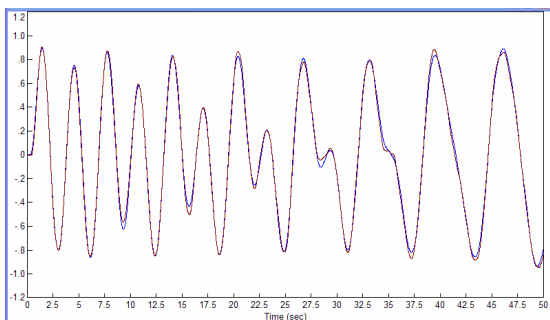


Рис. 18. Исходный сигнал с фильтрацией и задержкой и результат преобразования с фильтрацией в тех же условиях, при увеличении частоты преобразования в 4 раза (как на Рис. 17)

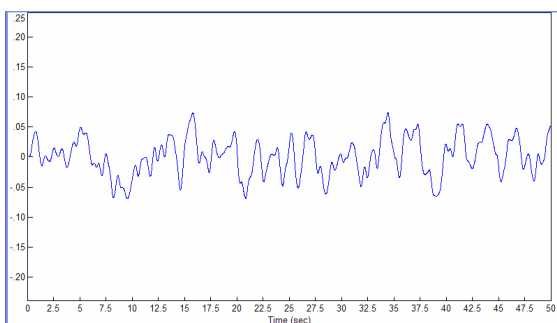


Рис. 19. Ошибка результата преобразования в тех же условиях, что на рис. 16, при увеличении частоты преобразования в 4 раза (как на Рис. 17)

Если и далее повышать частоту преобразования, ошибка также уменьшается,

что иллюстрируют аналогичные графики на Рис. 20–22.

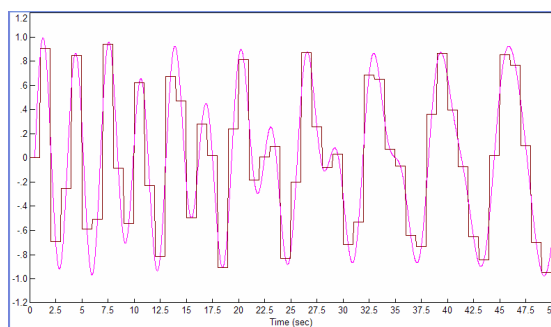


Рис. 20. Исходный сигнал и результат преобразования при периоде преобразования, равном 1 с (в 2,5 раза выше, чем в первом эксперименте); шумы отсутствуют

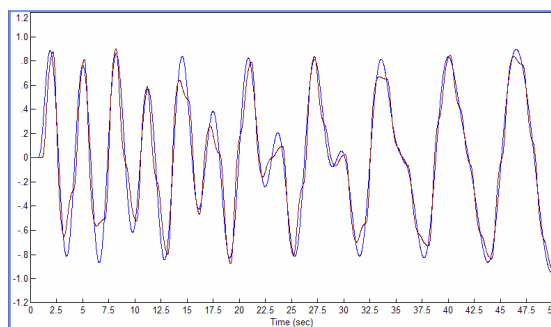


Рис. 21. Исходный сигнал после фильтрации и задержки и результат преобразования по Рис. 20 после фильтрации

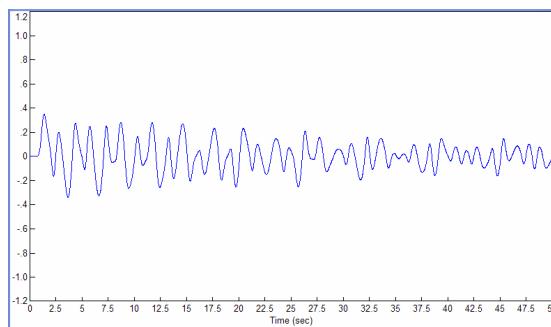


Рис. 22. Ошибка преобразования (разность сигналов на Рис. 21), масштаб тот же, что на Рис. 21

Если же частоту преобразования уменьшить, то ошибка увеличивается, что иллюстрируют аналогичные графики на Рис. 23–25. При добавлении гауссовых шумов ситуация еще больше ухудшается. На Рис. 26 показан сигнал с гауссовыми шумами и результат его преобразования. На Рис. 27 показаны оба этих сигнала после прохождения ими тех же идентичных фильтров. На Рис. 28 показана ошибка преобразования для этого случая, полученная вычитанием сигналов, показанных на Рис. 27, друг из друга. Как видно из этого результата, наличие высокочастотных шумов существенно увеличивает ошибку преобразования. Применение более высокой

частоты преобразования, хотя и не столь высокой, чтобы высокочастотные гауссовы шумы стали удовлетворять условиям теоремы Котельникова, позволяет многократно снизить указанную ошибку, порождаемую гауссовыми шумами.

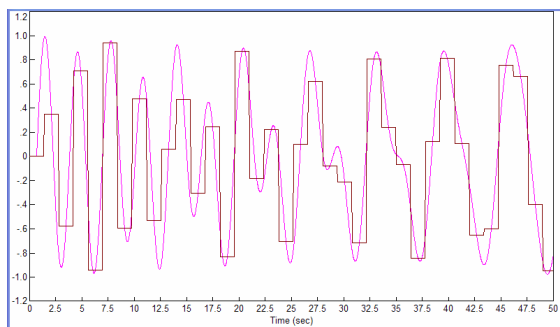


Рис. 23. Исходный сигнал и результат преобразования при изменении частоты преобразования (период равен 1,4 с)

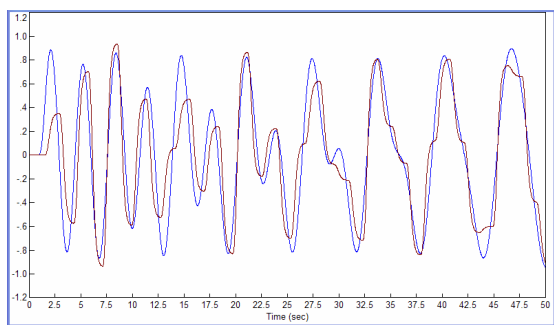


Рис. 24. Исходный сигнал после фильтрации и задержки и результат преобразования по Рис. 20 после фильтрации при изменении частоты преобразования как на Рис. 23

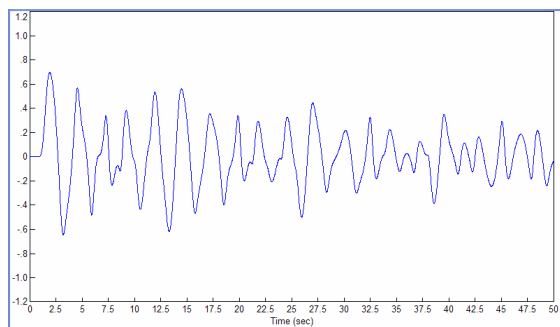


Рис. 25. Ошибка преобразования (разность сигналов на рис. 24), масштаб тот же, что на рис. 24

Действительно, на Рис. 29 показаны тот же входной сигнал с теми же гауссовыми шумами и результат его преобразования при увеличении частоты преобразования в 75 раз, а именно: период преобразования стал 0,02 с. На рис. 30 показаны оба сигнала после фильтрации при внесении соответствующего запаздывания во входной сигнал, равного половине периода преобразования. Видно, что визуально эти сигналы совпадают. На Рис. 31 показана ошибка преобразования, вычисленная как разница

между двумя сигналами, показанными на Рис. 30. Для наглядности масштаб сохранен, так же, как и на Рис. 25. Видно, что ошибка резко уменьшилась.

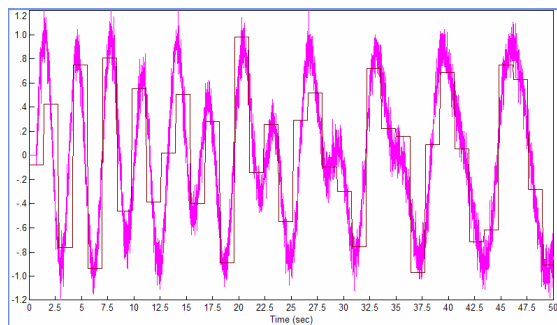


Рис. 26. То же, что на рис. 23 при наличии гауссовых шумов

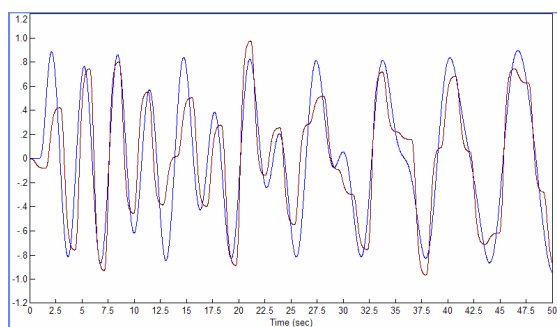


Рис. 27. То же, что на рис. 24 при наличии гауссовых шумов

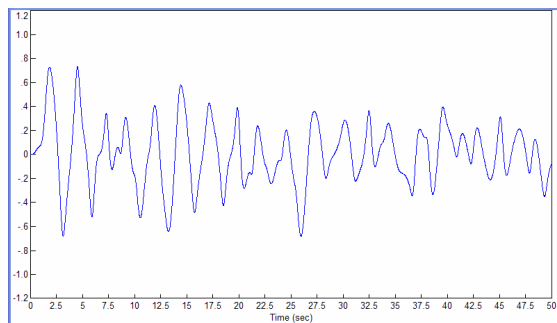


Рис. 28. То же, что на рис. 25 при наличии гауссовых шумов

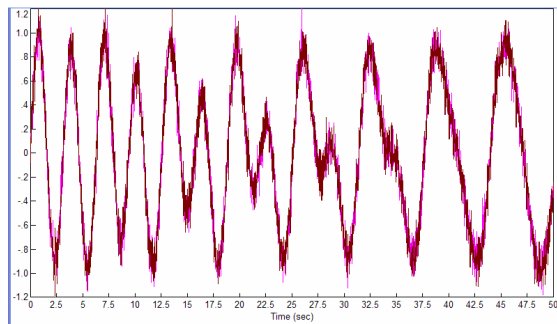


Рис. 29. То же, что на рис. 26 при увеличении частоты преобразования в 75 раз (период преобразования равен 0,02 с)





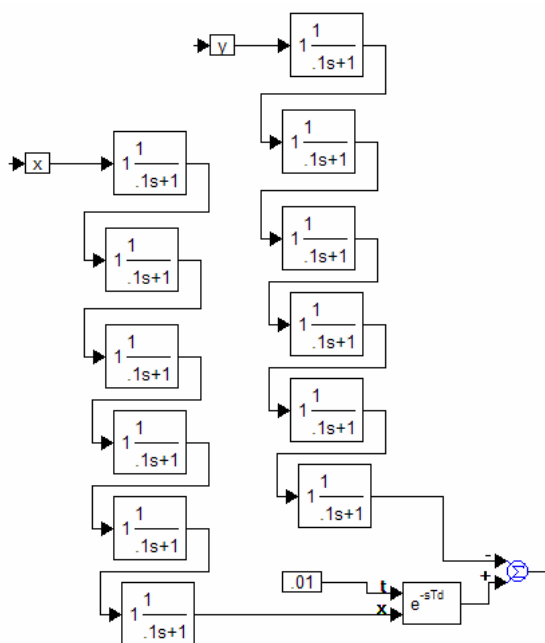


Рис. 36. Структура для моделирования двух фильтров и звена запаздывания (к Рис. 31)

### ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Поскольку на практике после получения отсчетов входного сигнала с помощью АЦП для дальнейшей обработки никогда не применяется метод восстановления, который предполагается при доказательстве теоремы Котельникова, и поскольку всегда преобразуется конечный сигнал, а не бесконечный во времени, выполнение условий теоремы недостаточно для восстановления исходного сигнала по полученным его отсчетам. При моделировании в данной работе использовался именно такой способ обработки полученной последовательности отсчетов, который используется практически во всех реальных системах. В этих условиях выявлено, что для данного сигнала при отсутствии шумов период преобразования должен быть не более 0,08 с, что составляет около 40 отсчетов на период высшей частоты в преобразуемом сигнале. При наличии шумов даже этого может оказаться недостаточно. Можно рекомендовать 50–100 отсчетов на период. Тем самым можно утверждать, что желательное соотношение между верхней граничной частотой спектра преобразуемого сигнала и частотой его преобразование задается следующим соотношением:

$$f \geq f_B \Rightarrow S(f) = 0 \Rightarrow f_K \geq 50f_B. \quad (4)$$

Дополнительные соображения состоят в том, что любой АЦП дает результат, квантованный не только по времени, но и по уровню. Проблемы, порождаемые квантованием по уровню, никак не рассматриваются при выводе теоремы Котельникова. Уменьшение шага

квантования по времени способствует снижению проблем, порождаемых квантованием по уровню. Это также можно показать моделированием.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что предположение о том, что требования теоремы Котельникова слишком слабы, подтвердились. Предположение, что увеличение частоты квантования в 1,5–2 раза достаточно [2], не подтвердилось. Рекомендуемый запас составляет 20 – 25 раз, т. е. рекомендуемая частота преобразования должна в 40–50 раз превышать верхнюю границу спектра преобразуемого сигнала. Это требование не относится к преобразованию заведомо гармонического сигнала с целью получения сигнала разностной частоты, что используется для измерения разностей фаз [6, 7]. В дальнейшем целесообразно детально исследовать влияние дискретности преобразования по уровню на ошибку преобразования и снижение этого влияния за счет повышения частоты преобразования.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жмудь, В. А. Моделирование замкнутых систем автоматического управления: учебное пособие для академического бакалавриата / В. А. Жмудь. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 126 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-03410-3. URL: <http://urait.ru/catalog/403830>
- [2] В.А. Жмудь, В.А. Тайченачев. Системы автоматического управления высшей точности: учеб. пособие, В.А. Жмудь, А.В. Тайченачев; Новосиб. Гос. ун-т – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2016. – 178 с.
- [3] С.В. Каменский, Г.А. Французова, Г.П. Чикильдин, В.А. Жмудь, А.С. Востриков, Ю.Е. Воскобойников, Е.А. Басыня, В.Г. Трубин. Системы автоматического управления, мехатроники и робототехники: монография / коллектив авторов; под общей редакцией Г.А. Французовой. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 210 с.
- [4] V A Zhmud, L V Dimitrov. The influence of the type of the test signal on the result of numerical optimization of regulators. . IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 803 (2017) 012186 doi:10.1088/1742-6596/803/1/012186. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/803/1/012186/pdf>
- [5] V A Zhmud, I L Reva, L V Dimitrov. Design of robust systems by means of the numerical optimization with harmonic changing of the model parameters. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 803 (2017) 012185 doi:10.1088/1742-6596/803/1/012185. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/803/1/012185/pdf>
- [6] Precision frequency meter for basic metrology and displacement measurements / Zhmud, V., Goncharenko, A., Liapidevskiy, A.V. 2015. Testing and Measurement: Techniques and Applications - Proceedings of the 2015 International Conference on



- Testing and Measurement: Techniques and Applications, TMTA 2015 pp. 125-130.
- [7] V. Zhmud, L. Dimitrov. Designing of the Precision Automatic Control Systems. Monography. – Novosibirsk, Publishing house “KANT”, 2017. – 126 p.

## Investigation of the Error of Signal Recovery from the Results of its Sampling

V. A. ZHMUD, W. HARDT

Novosibirsk State Technical University.  
Novosibirsk, Russia; Department of Computer Science, Chemnitz University of Technology,  
Chemnitz, Germany

*Abstract:* Traditionally, when using an analog-to-digital conversion, it is necessary to observe the requirements of Kotel'nikov's theorem (Shannon and Nyquist in the English-language literature). According to this theorem, the frequency of the transformation should, at least, twice exceed the upper boundary frequency of the spectrum of the signal being converted. It is also traditionally considered that the presence of high-frequency noises of more than one quantization of the level of the leveling has an extremely unfavorable effect on the result of the conversion. From this the need follows for pre-filtering of the signal before the transformation begins according to the conditions of this relationship. In this paper, by modeling in the *VisSim* program, it is shown that the conditions of this theorem are insufficient; the difference is more than an order of magnitude. At the same time, it is shown that the influence of high-frequency noises affects the conversion error much less than the effect of insufficient conversion frequency. In addition, this effect of noise is also greatly weakened by increasing the conversion frequency. The recommendations are based on this are to increase the requirement of this theorem by at least 25 times, that is, requiring a 50 times excess of the conversion frequency over the upper boundary frequency of the input signal.

*Key words:* signal transformation, ADC, Kotel'nikov theorem, Nyquist theorem, Shannon theorem, Nyquist frequency, simulation, error

## REFERENCES

- [1] Zhmud, V. A. Modelirovanie zamknytyh sistem avtomaticheskogo upravlenija: uchebnoe posobie dlja akademicheskogo bakalavriata / V. A. Zhmud. – 2-e izd., ispr. i dop. – M.: Izdatel'stvo Jurajt, 2017. – 126 s. – (Bakalavr. Akademicheskij kurs). – ISBN 978-5-534-03410-3. URL: <http://urait.ru/catalog/403830>
- [2] V.A. Zhmud, V.A. Tajchenachev. Sistemy avtomaticheskogo upravlenija vysshej tochnosti: ucheb. posobie, V.A. Zhmud, A.V. Tajchenachev; Novosib. Gos. un-t – Novosibirsk: IPC NGU, 2016. – 178 s.
- [3] S.V. Kamenskij, G.A. Francuzova, G.P. Chikil'din, V.A. Zhmud, A.S. Vostrikov, Ju.E. Voskobochnikov, E.A. Basynja, V.G. Trubin. Sistemy avtomaticheskogo upravlenija, mehatroniki i robototehniki: monografija / kollektiv avtorov; pod obshhej redakciej G.A. Francuzovoj. – Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2017. – 210 s.
- [4] V A Zhmud, L V Dimitrov. The influence of the type of the test signal on the result of numerical optimization of regulators. . IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 803 (2017) 012186 doi:10.1088/1742-6596/803/1/012186. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/803/1/012186/pdf>
- [5] V A Zhmud, I L Reva, L V Dimitrov. Design of robust systems by means of the numerical optimization with harmonic changing of the model parameters. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 803 (2017) 012185 doi:10.1088/1742-6596/803/1/012185. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/803/1/012185/pdf>
- [6] Precision frequency meter for basic metrology and displacement measurements / Zhmud, V., Goncharenko, A., Liapidevskiy, A.V. 2015. Testing and Measurement: Techniques and Applications - Proceedings of the 2015 International Conference on Testing and Measurement: Techniques and Applications, TMTA 2015 pp. 125-130.
- [7] V. Zhmud, L. Dimitrov. Designing of the Precision Automatic Control Systems. Monography. – Novosibirsk, Publishing house “KANT”, 2017. – 126 p.



**Вадим Аркадьевич Жмуд** –  
заведующий кафедрой  
Автоматики НГТУ, профессор,  
доктор технических наук.  
E-mail: [oao\\_nips@bk.ru](mailto:oao_nips@bk.ru)



**Wolfram Hardt** -  
Department of Computer Science,  
Chemnitz University of  
Technology, Chemnitz, Germany  
Prodekan für Internationales,  
Direktor Universitätsrechenzentrum,  
Professor für Technische Informatik,  
Technische Universität Chemnitz,  
**Germany**  
E-mail: [hardt@cs.tu-chemnitz.de](mailto:hardt@cs.tu-chemnitz.de)