

# Дискретизация изображений в реальных системах с помощью обобщенных функций

Гужов В.И., Марченко И.О., Хайдуков Д.С., Ильиных С.П.  
ФГБОУ ВПО НГТУ, Новосибирск, Россия

**Аннотация:** В статье рассматривается дискретизация изображений в реальных системах с помощью обобщенных функций. Показано, что в частотной области спектр сигнала является не сверткой, а произведением спектра сигнала со спектром дискретизирующей функции.

**Ключевые слова** Дискретизация, квантование, цифровая обработка сигналов, обобщенные функции

## ВВЕДЕНИЕ

Для компьютерного анализа изображения необходимо преобразовать в цифровой вид. Преобразование непрерывного сигнала в цифровой вид можно трактовать как отображение непрерывного множества в счетное множество. В результате преобразования в общем случае изображение представляется в виде некоторого массива чисел. Необходимо соблюдать соответствие между непрерывными и цифровыми преобразованиями. Непрерывное и цифровое преобразования сигнала соответствуют друг другу, если одинаковые входные сигналы они преобразуют в одинаковые выходные.

Для преобразования непрерывных двумерных сигналов в цифровые используют две элементарные процедуры - дискретизацию и квантование. Поэлементное квантование – это замена непрерывной шкалы значений этих чисел - дискретной. Дискретизация - это замена непрерывного аналогового сигнала последовательностью чисел, представляющих разложение этого сигнала по какому-либо конечномерному базису. Дискретизация относится к классу линейных преобразований. Поэлементное квантование - к классу нелинейных преобразований.

Дискретизация изображений заключается в получении пространственных отсчетов (sampling) сигнала. Наиболее удобным способом пространственной дискретизации является представление сигнала в виде выборок значений (отсчетов) в отдельных, регулярно расположенных точках, отделенных друг от друга интервалом, который называется интервалом дискретизации.

В системах цифровой обработки изображений отсчеты получают в результате измерения некоторых физических характеристик реального изображения, таких как яркость или оптическая плотность. Любое измерительное устройство имеет некоторую

погрешность. Для того чтобы оценить достоверность измеренных значений, необходимо построить математическую модель преобразования непрерывных изображений в дискретные массивы чисел.

Теория дискретизации изображений подробно рассмотрена в монографии У.К. Прэтта – «Цифровая обработка изображений». Книга вышла в 1978 г., её перевод на русский язык появился в 1982 г. [1]. Огромное число ссылок на эту работу подтверждает важность затронутых в ней проблем. Все последующие работы по дискретизации изображений в основном ссылаются на математическую модель, приведенную в этой монографии.

Дискретизированное изображение описывается в [1] следующим соотношением

$$F_p(x, y) = F_f(x, y) \cdot S(x, y), \quad (1)$$

где  $F_f(x, y)$  - исходное непрерывное изображение бесконечных размеров, а  $S(x, y)$  - некоторая пространственно-дискретизирующая функция. В случае идеальной дискретизации используется функция

$$S(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \delta(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y), \quad (2)$$

состоящая из бесконечного числа дельта-функций, заданных в узлах решетки ( $\Delta x, \Delta y$ ) (Рис. 1).

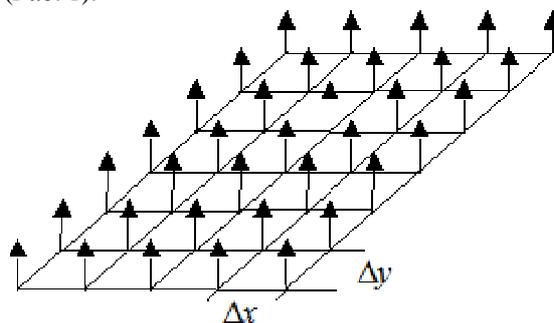


Рис. 1. Набор двумерных дельта-функций, осуществляющих дискретизацию изображений

Для анализа процесса дискретизации удобно анализировать спектр дискретной функции -  $\mathfrak{F}_p(\omega_x, \omega_y)$ . Поскольку дискретизация описывается выражением (1), то согласно теореме о свертке, спектр дискретизированного изображения можно представить в виде свертки спектра

исходного изображения  $\mathfrak{Z}_I(\omega_x, \omega_y)$  и спектра дискретизирующей функции  $\Phi(\omega_x, \omega_y)$ .

$$\mathfrak{Z}_p(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4\pi^2} \mathfrak{Z}_I(\omega_x, \omega_y) \otimes \Phi(\omega_x, \omega_y) \quad (3)$$

Однако функция  $S(x, y)$  является обобщенной функцией. Особенности воздействий обобщенных функций на непрерывные сигналы существенно влияют на результаты математических выводов. В частности запись выражения (1) не имеет смысла, поскольку обобщенные функции всегда фигурируют только под знаком интеграла. Поэтому неверно и выражение (3).

В этой статье приведена математическая модель процесса дискретизации с учетом действия обобщенных функций. Для простоты рассмотрим одномерный случай дискретизации функции  $f(x)$ . Затем полученную модель обобщим на двумерные изображения.

### 1. ОПИСАНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л. Соболевым при решении задачи Коши для гиперболических уравнений (1937 г.), а в 50-х годах Л. Шварц дал систематическое изложение теории обобщенных функций и построил теорию их преобразования Фурье [2].

Понятие обобщенной функции удается ввести благодаря тому, что обобщенные функции никогда не входят непосредственно в результаты измерений. Они всегда фигурируют под знаком интеграла, описывающего стадию наблюдения или регистрации. Всегда, когда применяется обобщенная функция, то имеется в виду, что в дальнейшем будет производиться интегрирование по тем переменным, от которых она зависит. Поэтому достаточно знать только результат действия данной обобщенной функции на интегральное преобразование.

Будем обозначать действие обобщенной функции  $\varphi(x)$  на основную функцию  $f(x)$  следующим образом:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (4)$$

Выражение (4) можно рассматривать как скалярное произведение двух функций «хорошей» функции  $f(x)$  и обобщенной -  $\varphi(x)$ . «Хорошей» функцией называется такая функция, которая имеет непрерывные производные всех порядков и отлична от нуля только в конечной области. Все «хорошие» функции допускают преобразование Фурье [3].

Возьмем произвольную функцию  $f(x)$ . Идеальную дискретизацию можно представить

как результат воздействия некоторой обобщенной функции  $comb_{\Delta x}(x)$  на  $f(x)$ .

$$f_p(x) = (f(x), comb_{\Delta x}(x)) \quad (5)$$

где  $comb_{\Delta x}(x)$  - гребенка Дирака. Гребенка Дирака определяется как

$$comb_{\Delta x}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta x) \quad (6)$$

где смещенная дельта-функция Дирака  $\delta(x - x_0)$  определяется как

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (7)$$

Действие дельта-функции  $\delta(x - x_0)$  на  $f(x)$  можно описать как

$$(f(x), \delta(x - x_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0) \quad (8)$$

Действие гребенки Дирака (2) на  $f(x)$  можно описать как

$$\begin{aligned} f_p(x) &= (f(x), comb_{\Delta x}(x)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\Delta x)dx = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - i\Delta x)dx = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i\Delta x) \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение (9) означает, что значения  $f(x)$  задаются только в точках отсчетов.

Эта операция описывает дискретизацию функции  $f(x)$ , т.е. перевод непрерывной функции в дискретный вид  $f(i\Delta x)$ .

Представив выражение (9) в виде

$$f(i\Delta x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(\xi - i\Delta x)d\xi \quad (10)$$

можно заметить, что выражение под интегралом представляет свертку  $f(x)$  со смещенной функцией Дирака. По теореме о свертке определим спектр дискретной функции как произведение спектров функций  $f(x)$  и  $\delta(x - x_0)$ .

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_p(\omega_x) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathfrak{Z}(f(x) \otimes \delta(x - i\Delta x)) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathfrak{Z}_I(\omega_x) \cdot \mathfrak{Z}(\delta(x - i\Delta x)) \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathfrak{Z}_I(\omega_x)$  - спектр исходного непрерывного сигнала.

Учитывая, что

$$\mathfrak{Z}(\delta(x - k\Delta x)) = e^{-i\omega k\Delta x} \quad (12)$$

и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k\Delta x} = \frac{2\pi}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{\Delta x}) \quad (13)$$

выражение (11) можно переписать в виде

$$\mathfrak{S}_p(\omega_x) = \frac{2\pi}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}_f(\omega - k \frac{2\pi}{\Delta x}) \quad (14)$$

Эта функция будет периодической функцией с периодом  $\frac{2\pi}{\Delta x}$  (Рис. 2), а в пределах одного периода её спектр равен спектру исходной непрерывной функции  $f(x)$ .

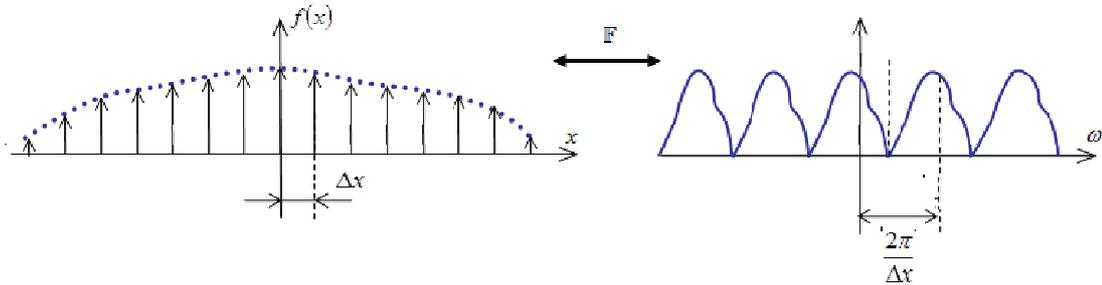


Рис. 2. Дискретная функция (слева) и ее спектр (справа)

Это хорошо известный результат подтверждает правильность использования аппарата обобщенных функций для идеальной дискретизации.

Рассмотрим, что произойдет с сигналом при дискретизации в реальных системах.

## II. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ В РЕАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В реальных системах дискретизации изображений в отличие от идеального случая выполняются следующие условия:

- дискретизирующая решетка имеет конечные размеры;
- ширина дискретизирующих импульсов заметно отличается от нуля.

Последовательность точек, в которых берутся отсчеты, называется растром. Различают регулярные растры и стохастические. Основной признак регулярных растров — это периодическая структура. Как правило, применяются растры, точки отсчетов в которых находятся в узлах квадратной сетки.

Практически операция дискретизации осуществляется измерением сигнала с помощью датчика, который проводит усреднение по некоторой конечной площадке (апертуре).

На Рис. 3 показан растр с прямоугольными апертурами.

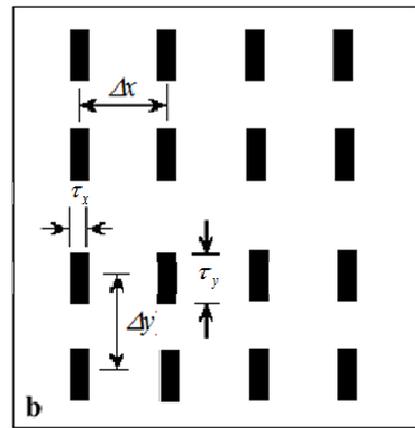


Рис. 3. Пример регулярного растра с прямоугольными апертурами

Дискретизацию в реальных системах можно представить как результат воздействия некоторой обобщенной функции, которая состоит из ограниченной периодической последовательности прямоугольных импульсов (Рис. 4) на  $f(x)$ .

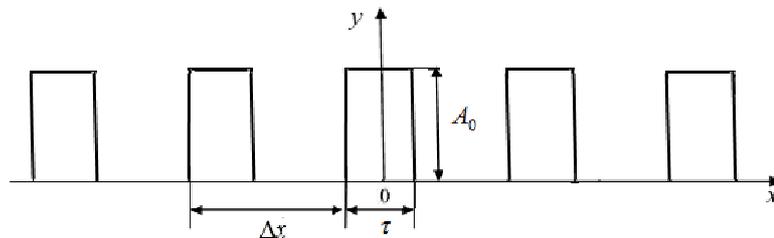


Рис. 4. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Периодическую последовательность можно представить в виде суммы:

$$P_{\tau, \Delta x}(x) = A_0 \sum_{k=-N}^N \text{rect}_{\tau}(x - k\Delta x) \quad (15)$$

Определим действие суммы прямоугольных импульсов на функцию

$$f_p(x) = (f(x), \sum_{k=-N}^N \text{rect}_\tau(x - k\Delta x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sum_{k=-N}^N \text{rect}_\tau(x - k\Delta x) dx, \quad (16)$$

где  $\text{rect}_\tau(x - k\Delta x)$  - смещенный на  $\Delta x$  прямоугольный импульс с шириной  $\tau$  и амплитудой  $A_0$ .

Выражение (16) можно переписать как

$$f_p(i\Delta x) = \sum_{k=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \text{rect}_\tau(x - k\Delta x) dx \quad (17)$$

Выражение (17) описывает действие смещенного прямоугольного импульса на функцию  $f(x)$ . По определению смещенного импульса

$$(f(x), \text{rect}_\tau(x - \Delta x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \text{rect}_\tau(x - \Delta x) dx = \int_{\Delta x - \tau/2}^{\Delta x + \tau/2} f(x) dx \quad (18)$$

Выражение (18) описывает операцию усреднения по одной площадке прямоугольной апертуры. Соответственно выражение (17) определяет значения усреднений по каждому прямоугольному импульсу.

Выражение (18) определяет свертку функций. поэтому преобразование фурье от свертки можно представить

Спектр дискретной функции  $f_p(x)$  можно найти как произведение спектров функций  $f(x)$  и  $\text{rect}_\tau(x - \Delta x)$ .

$$\mathfrak{F}_p(\omega_x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(f(x) \otimes \text{rect}_\tau(x - i\Delta x)) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}_f(\omega_x) \cdot \mathfrak{F}(\text{rect}_\tau(x - i\Delta x)) \quad (19)$$

Преобразование фурье от ряда

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\omega) &= \sum_{k=-N}^N \mathfrak{F}(\text{rect}_\tau(x - k\Delta x)) = \\ &= A_0 \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) e^{k\Delta x \omega} \end{aligned}, \quad (20)$$

где  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  определяется как

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}. \quad (21)$$

Поэтому выражение (18) можно переписать в виде

$$\mathfrak{F}_p(\omega_x) = \mathfrak{F}_f(\omega_x) \cdot \tilde{D}(\omega) \quad (22)$$

В общем случае для последовательности из  $N$  импульсов длительностью  $\tau$  каждый, следующих с пространственной периодичностью  $\Delta x$ , спектр  $\tilde{D}(\omega)$  имеет вид [1]:

$$\tilde{D}(\omega) = A_0 \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega \Delta x\right]}{\sin\left(\frac{\omega \Delta x}{2}\right)}. \quad (23)$$

Состав спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов зависит от величины отношения периода последовательности к длительности импульса, называемого скважностью импульсов и числа этих импульсов. Скважность импульсов равна  $S = \frac{\Delta x}{\tau} = \frac{1}{D}$ , где  $D$  называется коэффициентом заполнения. Малая величина коэффициента заполнения достигается, когда элементы детектора малы и широко разделены. Традиционные датчики, используемые для ввода изображений, разработаны для улавливания максимально возможного количества освещения и имеют величину  $D$  между 0.5 и 1.

В случае 5 прямоугольных импульсов с  $\tau = \Delta x / 2$  получим (Рис. 5).

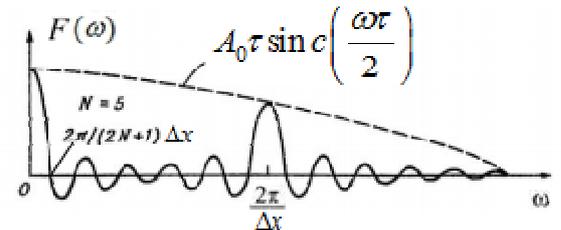


Рис. 5. Спектр пяти ( $N=5$ ) прямоугольных импульсов с  $\tau = \Delta x / 2$

В настоящее время наибольший коэффициент заполнения (близкий к 100%) имеют CCD матрицы, у CMOS матриц это коэффициент составляет 80-90%. На Рис. 6 показан фрагмент CMOS матрицы, полученный с помощью электронного микроскопа

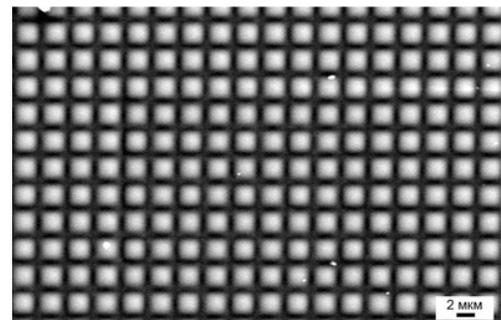


Рис. 6. Пример регулярного раstra CMOS матрицы

Рассмотрим, как сказывается увеличение числа импульсов на спектральную характе-

ристику. Выберем размер датчика соответствующий матрицы фотоприемников для бюджетных цифровых фотоаппаратов.

Полнокадровые модели как Canon, так и Nikon снабжаются сенсором, размер которого соответствует размеру кадра 35-мм плёнки, т.е. 36 x 24 мм. У неполнокадровых моделей размеры матрицы незначительно отличаются: у Nikon ~ 24 x 16 мм, у Canon APS-C ~ 22,3 x 14,9 мм.

Пусть размер датчика  $L=24$  мм. Теперь будем увеличивать число прямоугольных импульсов при коэффициенте заполнения 0.8.

На Рис. 7 показана амплитудно-частотная характеристика от 16 прямоугольных импульсов с единичной амплитудой с  $\Delta x=1.75$  мм и  $\tau=1.4$  мм. Шаг между отдельными высокими

пиками равен  $\omega = \frac{2\pi}{\Delta x}$ . Число небольших пиков

в пределах от 0 до  $\frac{2\pi}{\Delta x} - 2N$ . Множитель 2,

поскольку амплитудно-частотная характеристика, отрицательные значения на Рис. 7 отображаются в положительные значения.

На Рис. 8 приведен соответствующий амплитудно-частотный спектр функции  $\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ . На Рис. 9 показана амплитудно-

частотная характеристика датчика такого же размера с 1024 прямоугольными импульсами с  $\Delta x=0.0023$  мм, размер единичного датчика  $\tau=0.0019$  мм (Рис. 4).

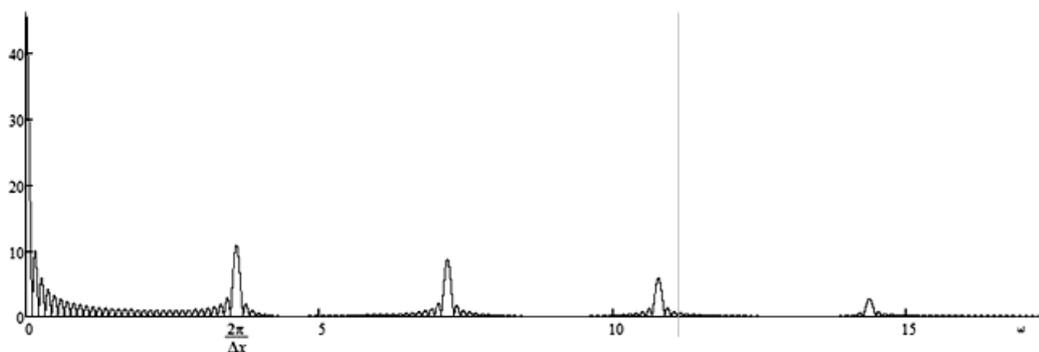


Рис. 7. Амплитудно-частотный спектр последовательности 16 прямоугольных импульсов

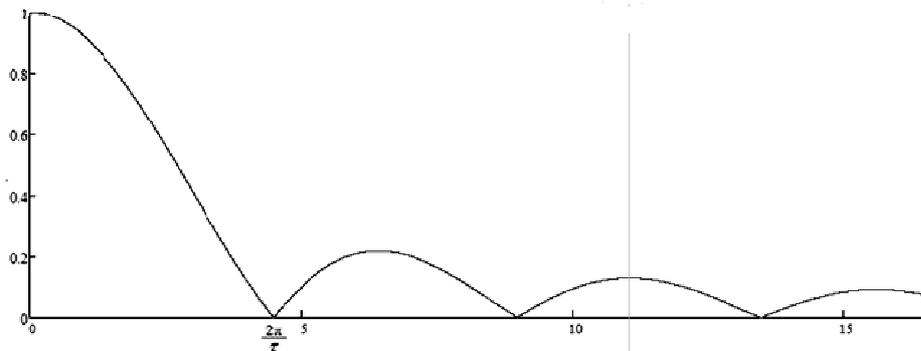


Рис. 8. Амплитудно-частотный спектр функции  $\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$  с  $\tau=1.4$  мм

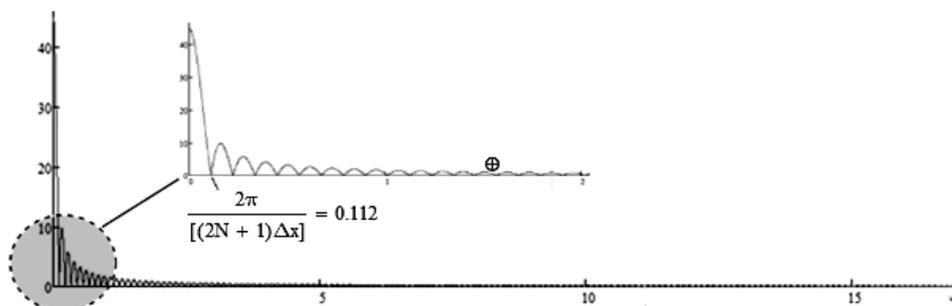


Рис. 9. Амплитудно-частотный спектр 1024 прямоугольных импульсов

На Рис. 9 пик  $\omega = \frac{2\pi}{\Delta x}$  не показан, но его амплитуда такая же, как и на предыдущих рисунках.

В показанном на Рис. 9 диапазоне частот функция  $\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \approx 1$ , поэтому её график не приведен.

Из Рис. 7–9 видно, что при дискретизации с помощью ограниченной периодической последовательности прямоугольных импульсов, при увеличении  $N$  спектр дискретного сигнала тоже становится дискретным.

Этот спектр является так же, как и для случая идеальной дискретизации, периодической функцией с периодом  $\frac{2\pi}{\Delta x}$ .

При увеличении  $N$  спектр сигнала в пределах одного периода хорошо описывается с помощью дискретного преобразования Фурье [5].

### III. ДВУМЕРНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Для двумерного случая операция идеальной дискретизации осуществляется аналогично. В качестве дискретизирующей функции берется двумерная решетка Дирака (см. Рис. 1).

Дискретное двумерное изображение можно представить как

$$\begin{aligned} f_p(x, y) &= (f(x, y), \text{comb}_{\Delta x, \Delta y}(x, y)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \delta(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y) dx dy = \\ &= \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \delta(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y) dx dy = \\ &= \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} f(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y) \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично одномерной дискретизации спектр дискретизированного изображения можно представить в виде

$$\mathcal{F}_p(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_x - j_1 \frac{2\pi}{\Delta x}, \omega_y - j_2 \frac{2\pi}{\Delta y}) \quad (25)$$

Из этого выражения видно, что спектр дискретизированного изображения получается путем бесконечного повторения спектра исходного изображения со сдвигом на величины кратные  $\omega_{xs} = \frac{2\pi}{\Delta x}$ ,  $\omega_{ys} = \frac{2\pi}{\Delta y}$  (Рис. 10).

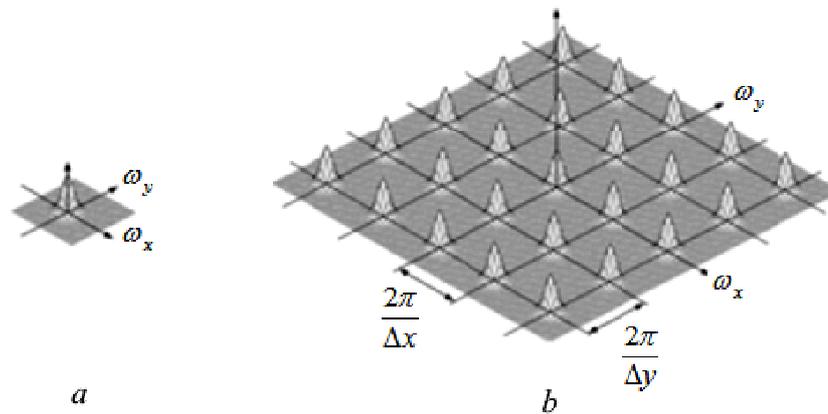


Рис. 10. Спектр дискретизированного изображения: а) - спектр исходного изображения; б) - спектр дискретизированного изображения

Для реальных систем используется двумерная последовательность ограниченного числа прямоугольных импульсов. Фурье-образ двумерной дискретизирующей функции имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\omega_x, \omega_y) &= \\ &= \tau_x \tau_y \text{sinc} \left( \frac{\omega_x \tau_x}{2} \right) \text{sinc} \left( \frac{\omega_y \tau_y}{2} \right) \times \\ &\times \frac{\sin \left[ \left( N_1 + \frac{1}{2} \right) \omega_x \Delta x \right]}{\sin \left( \frac{\omega_x \Delta x}{2} \right)} \times \frac{\sin \left[ \left( N_2 + \frac{1}{2} \right) \omega_y \Delta y \right]}{\sin \left( \frac{\omega_y \Delta y}{2} \right)} \end{aligned} \quad (26)$$

Эта функция имеет вид, одномерный случай которого показан на Рис. 7. Первые несколько пиков в интервале от 0 до  $\frac{2\pi}{\Delta x}$  показаны на

Рис. 11.

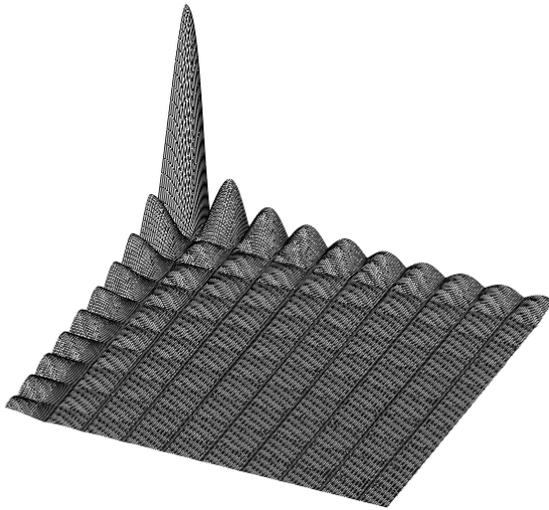


Рис. 11 Спектр дискретизирующей функции (показаны только первые 10 пиков)

Если убрать первые пики по столбцу и по строке можно более детально увидеть вид остальных пиков (Рис. 12).

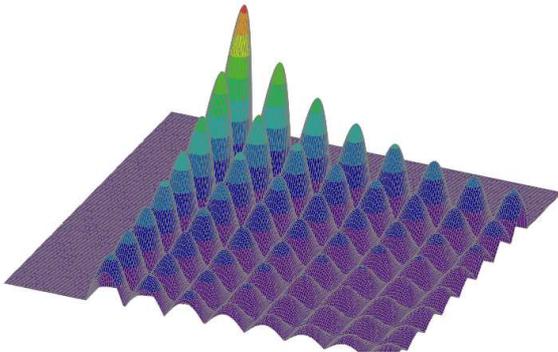


Рис. 11 Спектр дискретизирующей функции без первых пиков

Аналогично спектр дискретного изображения равен

$$\mathfrak{S}_p(\omega_x, \omega_y) = \mathfrak{S}_I(\omega_x, \omega_y) \cdot \tilde{D}(\omega_x, \omega_y) \quad (27)$$

Из выражения (26) видно, что спектр дискретного изображения имеет дискретный вид и является периодической функцией с периодом  $\left(\frac{2\pi}{\Delta x}, \frac{2\pi}{\Delta y}\right)$ .

Часть дискретизирующей функции, показанной на Рис. 11, 12, будет воздействовать на часть единичного спектра исходного изображения, показанного на Рис. 10, а.

## ВЫВОДЫ

В статье рассмотрены вопросы дискретизации изображений в реальных системах.

Построен математический аппарат дискретизации на основе обобщенных дискретизирующих функций.

Показано, что в частотной области спектр сигнала является не сверткой, а произведением спектра сигнала со спектром дискретизирующей функции.

С ростом числа прямоугольных импульсов спектр сигнала становится периодической (с периодом  $\frac{2\pi}{\Delta x}$ ) дискретной функцией (с числом дискретных значений  $N$ ).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований «Разработка методов сверхразрешения в цифровой голографической интерферометрии» (Грант № 16-08-00565).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] У.Прэтт. Цифровая обработка изображений (в 2-х книгах). Книга 1. М.: Мир, 1982. 311 с.
- [2] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Гос. Изд-во физ-мат. Литературы. 1959. 470 с.
- [3] Л.М. Сороко. Основы голографии и когерентной оптики. М: Гл.ред.физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1971, 616 с.
- [4] Л.Рабинер, М. Гоулд. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М: «Мир». 1978. 848 с.
- [5] В.И. Гужов, Р.Б. Несин, В.А. Емельянов. Представление преобразования Френеля в дискретной форме. Автоматика и программная инженерия, Новосибирск. 2016. №1(14). С. 91–96.

## Sampling the image in real systems using generalized functions

V.I.GUZHOV, I.O.MARCHENKO,  
D.S.HAJDUKOV, S.P. ILYNIKH

*Abstract:* The paper considers sampling of images in real systems using generalized functions. It is shown that in the frequency domain spectrum of the signal is not the convolution, but the product of signal spectrum with spectrum of sampling function.

*Key words;* Sampling, quantization, digital signal processing, generalized functions

## REFERENCES

- [1] W.K. Pratt. Digital Image Processing. Wiley, New-York 1978. 750 pp.
- [2] I.M.Gel'fant, G.E. Shilov. Obobshhennye funkicii i dejstvija nad nimi. M.: Gos. Izd-vo fiz-mat. Literatury. 1959. 470 s.
- [3] L.M. Soroko. Osnovy golografii i kogerentnoj optiki. M: Gl.red.fiz.-mat. lit. izd-va «Nauka», 1971, 616 p.
- [4] L. Rabiner, M.Gould. Teorija i primenenie cifrovoj obrabotki signalov.- M: «Mir».- 1978, 848 p.
- [5] V.I. Guzhov, R.B. Nesin, V.A. Emelyanov. Presentation of Fresnel Transform in the Discrete Form. Automatics & Software Engineering, Novosibirsk. 2016. No.1(15). p.91–96.



**Владимир Иванович Гужов** - профессор кафедры ССОД Новосибирского Государственного Технического университета, доктор технических наук. Является автором более 190 научных работ.

Область научных интересов: высокоточные интерференционные измерения, безошибочные вычисления, теория чисел.

E-mail: [vig@nstu.edu.ru](mailto:vig@nstu.edu.ru)



**Илья Олегович Марченко** – доцент, каф. ССОД НГТУ, к.т.н.. Является автором более 25 научных работ. Область научных интересов: интеллектуальные датчики.



**Сергей Петрович Ильиных** - доцент кафедры «Вычислительная техника» НГТУ, доцент, к.т.н., автор более 100 научных статей. Область научных интересов и компетенций – лазерные измерительные системы, обработка изображений.

E-mail: [isp51@yandex.ru](mailto:isp51@yandex.ru)

**Дмитрий Сергеевич Хайдуков** – ассистент, каф. ССОД НГТУ, к.т.н.. Является автором более 20 научных работ. Область научных интересов: расшифровка интерферограмм, цифровая голография.

