

Методы моделирования тепловых полей бикубическими сплайнами

Х.Н.Зайнидинов¹, С.А. Бахрамов², М.А. Кучкаров¹

¹Ташкентский университет информационных технологий

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Аннотация: Представлен метод расчета температурного поля печатной платы, основанный на аппроксимации системой бикубических сплайнов совокупностей измеренных значений температур в выбранных точках печатной платы. Метод позволяет определить температуру печатной платы в любой ее точке и может быть применен при расчете температурных режимов работы печатных плат, входящих в состав аппаратуры координатно-временного обеспечения. В процессе разработки конструкций аппаратуры координатно-временного обеспечения (КВО) постоянно возникают задачи расчета и анализа процессов тепловыделения узлов и блоков аппаратуры КВО, на основании чего производится выбор конструктивных решений при проектировании систем. Существенную помощь в анализе тепловых процессов в конструкциях печатных плат (ПП) может оказать специализированное программное обеспечение, позволяющее провести необходимые расчеты на ранних стадиях проектирования аппаратуры КВО и доступное пользователю, не имеющему специальной подготовки. Для проведения анализа тепловых режимов ПП аппаратуры КВО предлагается использовать программное обеспечение (ПО) *BetaSoft Board* фирмы *Dynamic Soft Analysis Inc* (США). Программа имеет развитый математический аппарат, позволяющих провести полноценное трехмерное моделирование явлений теплопередачи на ПП. Точность моделирования при этом составляет порядка 10 % по сравнению с натурными испытаниями. Однако при всех положительных сторонах ПО *BetaSoft Board* в нем затруднено определение значения температуры в заданной точке ПП, поскольку все расчеты выводятся как градиенты температур в определенных интервалах, т.е. фактически точные значения температур доступны только на границах температурных зон. Рассмотренный в статье метод аппроксимации значения температур ПП бикубическими сплайнами позволяет устранить указанный недостаток и заменить непрерывную функцию двух переменных комбинацией функций, каждая из которых зависит от одной переменной.

Ключевые слова: модель теплового поля, печатная плата, распределение температур, плоскость, аппроксимация, бикубический сплайн, координатно-временное обеспечение.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе разработки конструкций аппаратуры координатно-временного обеспечения (КВО) постоянно возникают задачи расчета и анализа процессов тепловыделения узлов и блоков аппаратуры КВО, на основании чего производится выбор конструктивных решений при проектировании систем. Существенную помощь в анализе тепловых процессов в конструкциях печатных плат (ПП) может оказать специализированное программное обеспечение, позволяющее провести необходимые расчеты на ранних стадиях проектирования аппаратуры КВО и доступное пользователю, не имеющему специальной подготовки.

Расчет тепловых режимов узлов и блоков аппаратуры КВО базируется на принципе электротепловой аналогии. Этот принцип заключается в том, что перенос тепловой энергии в конструкциях рассматривается аналогично переносу электроэнергии в электрических цепях. При этом аналогом силы тока выступает мощность нагретой зоны $P_{нз}$; аналогом разности потенциалов - разность температур (или перегрев) ΔT нагретой зоны

$T_{нз}$ и температуры окружающей среды $T_{ср}$; аналогом электропроводности - тепловая проводимость δ . Использование такой аналогии позволяет составлять тепловые схемы и производить их расчет по основным правилам электротехники.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обычно бывает задана тепловая мощность, выделяемая в узле/блоке аппаратуры КВО, указаны условия эксплуатации ($T_{ср}$) и известны конструктивные параметры узла/блока. Оценка теплового режима блока состоит в поэтапном определении перегрева нагретых зон: $\Delta T = P_{нз}/\delta$.

Изменяя конструктивные параметры теплопроводов и условия отвода тепла от внешних границ узла/блока аппаратуры КВО, необходимо стремиться к предельному снижению величины перегрева ΔT . Задача состоит в том, чтобы при заданной конструкции узла/блока аппаратуры КВО температура нагретой зоны не превышала предельного значения (для данного конкретного элемента и конкретной схемы). Во всех случаях желательно так сконструировать и рассчитать систему теплоотвода, чтобы ΔT не превышала 5-10 °С.

II. ИСПОЛЬЗУЕМОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Для проведения анализа тепловых режимов ПП аппаратуры КВО предлагается использовать программное обеспечение (ПО) *BetaSoft Board* фирмы *Dynamic Soft Analysis Inc* (США). Программа имеет развитый математический аппарат, позволяющих провести полноценное трехмерное моделирование явлений теплопередачи на ПП. Точность моделирования при этом составляет порядка 10 процентов по сравнению с натурными испытаниями [1, 2]. Кроме того, ПО *BetaSoft-Board* имеет специальный конвертер, обеспечивающий автоматическую передачу данных о конструкции ПП и размещенных на ее поверхности электрорадиоизделий из системы автоматизированного проектирования (САПР) *Expedition PCB*.

При моделировании теплового режима ПП в ПО *BetaSoft-Board* используются численные

методы, основанные на методах конечных разностей с адаптивными сетками, которые позволяют укрупнять шаг сетки на малых деталях ПП, не попадающих в основную, более крупную, сетку [1]. Преимущество такого подхода в повышенные быстродействия анализа при сохранении высокой точности вычислений. Типичное время вычисления для ПП, состоящей из 100 компонентов, на персональном компьютере класса 486 составляет порядка 30 секунд [1]. Моделируются процессы теплообмена, теплопроводности, конвекции и излучения.

Однако при всех положительных сторонах ПО *BetaSoft Board* в нем затруднено определение значения температуры в заданной точке ПП, поскольку все расчеты выводятся как градиенты температур в определенных интервалах, т. е. фактически точные значения температур доступны только на границах температурных зон (*Рис. 1*).

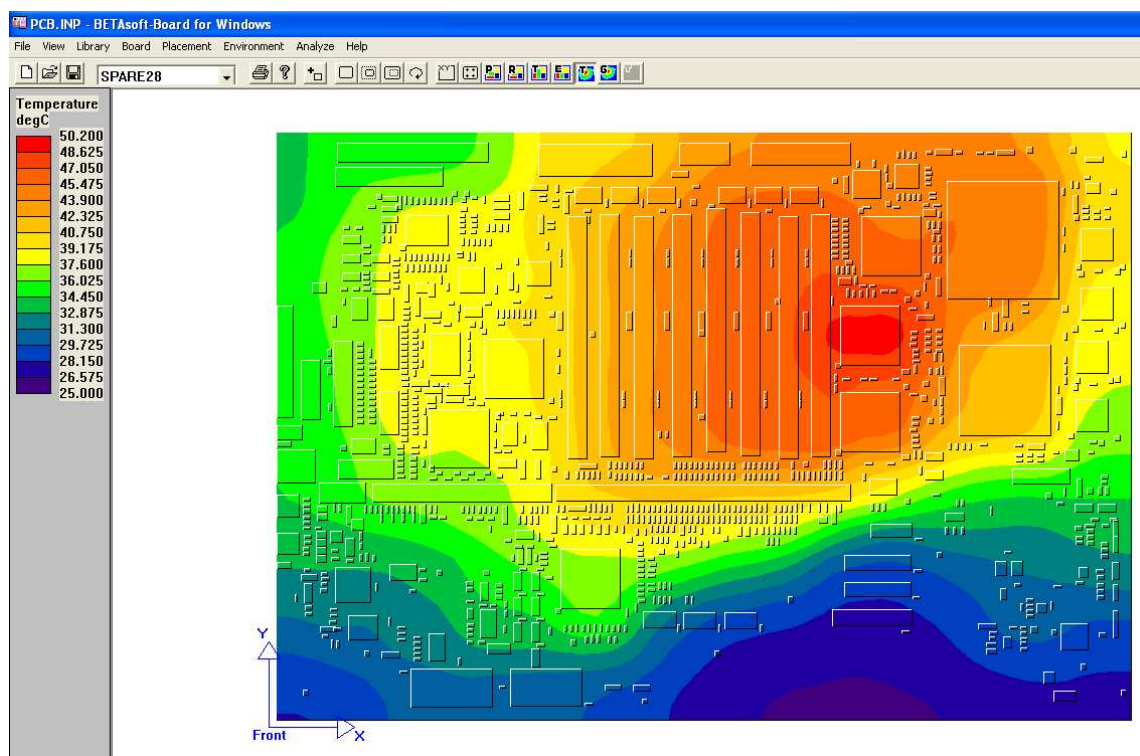


Рис. 1. Общий вид ПП и значения температуры ПП на границах температурных зон

III. МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ НА ОСНОВЕ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Предлагаемый метод аппроксимации значений температур ПП сплайнами позволяет устранить указанный недостаток и заменить сложную непрерывную функцию двух

переменных комбинацией функций, каждая из которых зависит от одной переменной.

Проблема построения сглаживающих полиномиальных сплайнов $S(x)$ часто сводится к задаче минимизации функционалов интегрального вида $J(a, S)$, в выражения для которых входят производные от аппроксимируемых функций $f(x)$ или их разностные аналоги, например [3]

$$J(\alpha, S) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (S_m(x_i) - f(x_i))^2 + \alpha \int_a^b \left| \frac{d^r}{dx^r} S_m(x) \right|^2 dx, \quad (1)$$

где α – параметр регуляризации, m – степень сплайна, i – номера узлов сплайна ($i=0, 1, \dots, n$), α_i – весовые множители (положительные числа), r – порядок производной от сплайна.

Наиболее широко распространены кубические сплайны $S_3(x)$, которые обладают экстремальным свойством [4]. Оно заключается в том, что среди всех функций пространства $C^{(2)}[a, b]$, интерполирующих заданную функцию, минимум функционала вида

$$J(S) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (S_3(x_i) - f(x_i))^2 + \alpha \int_a^b (S_3''(x))^2 dx. \quad (3)$$

Процесс минимизации функционала сводится к задаче решения системы алгебраических линейных уравнений с неособенной матрицей ленточного типа с диагональным преобладанием. Сплайнам 3-й степени обычно соответствуют пятидиагональные, симметричные положительно определенные матрицы.

$$-\beta_i \left(\frac{m_{i+1} - m_i}{h_{i+1}} - \frac{m_i - m_{i-1}}{h_i} \right) = S_3(x_i) - f(x_i), \quad (4)$$

где $\beta_i > 0$, $h_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $m_i = S''(x_i)$, $m_{i-1} = m_{n+1} = 0$, $h_0, h_{n+1} \neq 0$.

Требуется найти функцию $S_3(x)$, минимизирующую функционал вида:

$$F(S) = \int_a^b (S_3''(x))^2 dx + \sum_{i=0}^n \frac{1}{\beta_i} (S_3''(x_i) - f(x_i))^2. \quad (5)$$

Для определения неизвестных значений m_i строится система $n-1$ линейных алгебраических уравнений

$$Ax = f, \quad (6)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} d_0 & a_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & d_1 & a_1 & c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_0 & a_1 & d_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & d_{n-1} \end{bmatrix}$$

есть пятидиагональная симметричная матрица с коэффициентами a_i , c_i , d_i , зависящими от весовых множителей β_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

$$\Psi(f) = \int_a^b \left| \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|^2 dx. \quad (2)$$

достигается на кубическом сплайне $S_3(x)$ с так называемыми «естественными» краевыми условиями вида $S''(a)=0$, $S''(b)=0$. Для таких сплайнов выражение для функционала (1) может быть преобразовано к виду:

Задача сглаживания сплайнами функции одной переменной $f(x)$ может быть поставлена следующим образом [5]. Задана таблица значений функции в точках, т.е. $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_i)$, ..., $f(x_n)$ и может быть построена система соотношений:

В [5] доказывается, что система (6) имеет единственное решение относительно вектора $\{m_i\}$ при значениях h_i , отличающихся друг от друга в достаточно широком диапазоне. После ее решения и определения величин m_i значения сглаживающей функции в узлах сетки $f(x_i)$, могут быть найдены, если использовать соотношения (4):

$$S_3(x_i) = f(x_i) - \beta_i \frac{m_{i+1} - m_i}{h_{i+1}} - \frac{m_i - m_{i-1}}{h_i}, \quad (7)$$

При сглаживании обычно известны ошибки в определении значений $f(x_i) = f_i$, т.е. могут быть заданы неравенства

$$|S(x_i) - f_i| \leq \varepsilon_i. \quad (8)$$

В частности, могут быть заданы $\varepsilon_i = \varepsilon = \text{const}$.

В [5] приведен алгоритм нахождения таких множителей. Для определения точных значений β_i необходимо провести несколько итераций. Окончание выполнения итераций определяется из требования, чтобы величина ε не превышала заданного значения.

IV. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

В качестве примера приведем задачу вычисления распределения температуры по поверх-

ности электронной платы, порождаемой нагревом микросхем, для случая неравномерного расположения узлов функции $T(x, y)$.

Таблица 1

Измеренные значения температур печатной платы в заданных точках

x, mm	$T^{\circ}C, x$	ST°, x	y, mm	$T^{\circ}C, y$	ST°, y
48,0	37,60	37,60	90,9	32,88	32,86
110,0	39,17	39,18	94,8	34,45	34,48
141,3	40,75	40,75	99,5	36,03	36,00
158,5	42,32	42,32	104,3	37,60	37,46
181,4	43,90	43,90	111,0	39,18	39,30
204,4	45,47	45,48	118,2	40,75	40,82
246,5	47,05	47,06	123,4	42,33	42,32
262,7	48,63	48,61	128,7	43,90	42,74
298,6	48,63	48,59	135,9	45,48	45,50
309,11	47,05	47,08	162,9	47,05	47,12
317,2	45,47	45,49	174,1	48,63	48,72
328,7	43,90	43,91	191,8	48,63	48,68
356,4	42,32	42,32	206,6	47,05	46,96

На Рис.1 показаны замкнутые кривые – эквипотенциали, для которых значения температуры могут быть измерены. Как говорилось выше, в ПО *BetaSoft Board* затруднено определение значения температуры в заданной точке ПП, поскольку все расчеты выводятся как градиенты температур в определенных интервалах, т.е. фактически точные значения температур доступны только на границах температурных зон. В Таблице 1 приведены измеренные значения температур в точках, заданных по горизонтальной и вертикальной прямым линиям соответственно. Они обозначены на плате и в данном исследовании выбраны так, что проходят через наиболее нагретую микросхему.

Вычисленные на основе формул (4) и (7) значения сглаживающих кубических сплайнов $ST^{\circ}C(x)$ и $ST^{\circ}C(y)$ дают возможность построить для них кривые

зависимостей температуры от координат x и y , исходя из расположения узлов, заданных таблицей 1. Анализ погрешностей, получающихся при построении сглаживающих сплайнов, говорит о том, что они могут, во-первых менять знаки в зависимости от расположения точек на плате, а во-вторых, имеет место заметное расхождение значения интерполяционного и сглаживающего сплайнов при увеличении значений параметров β_x и/или β_y .

Можно оценить влияние изменений множителей β_x и β_y на точность приближения функции температурного поля сглаживающими сплайнами. Значения обеих функций приведены в точках, где расстояние между измеренным значением температуры и значением сплайна является наибольшим по модулю, и отражены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2

Влияние коэффициента β_x на точность приближения функции температурного поля

β_x	0,2	0,5	0,8	1	2	5	10
$T^{\circ}C, x$	47,05	47,05	47,05	47,05	47,05	47,05	48,63
$ST^{\circ}C, x$	47,05	47,05	47,05	47,05	47,06	47,07	48,60
$\Delta T^{\circ}C, x$	0	0	0	0	0,01	0,02	0,03

Таблица 3

Влияние коэффициента β_y на точность приближения функции температурного поля

β_y	0,1	0,5	1	5	10
$T^{\circ}C, y$	48,63	48,63	48,63	48,63	43,90
$ST^{\circ}C, y$	48,63	48,64	48,65	48,69	43,74
$\Delta T^{\circ}C, y$	0,00	0,01	0,02	0,06	0,16

V. МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ НА ОСНОВЕ БИКУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Наиболее простая формула приближения произвольной непрерывной функции двух переменных $f(x, y)$ линейной комбинацией функций, каждая из которых зависит от одной переменной, исследована В.И.Арнольдом [6]. Он показал, что множество функций вида

$$f(x, y) = c[\varphi(x) + \psi(y)], \quad (9)$$

не является плотным в пространстве $C(D)$, где c – постоянный коэффициент, D – двумерная область.

Это означает, что аппроксимация в виде суммы не может быть выполнена с бесконечно малой ошибкой. Практически для заданного температурного поля $T(x, y)$ при $c = 0.5$ получается максимальная ошибка ΔT , по модулю не превосходящая $0,02^{\circ}C$. Подтверждается вывод, сделанный в [3], о том, что ошибка аппроксимации растет с увеличением множителя β_x (β_y).

Более универсальный метод аппроксимации функций $f(x, y)$, обеспечивающий достижение минимума среднеквадратического отклонения,

по существу, впервые рассмотрен в [7]. Он использует приближающую формулу вида:

$$f(x, y) \cong \phi_0(x) + \psi_0(y) + \sum_{k=1}^n \phi_k(x) \psi_k(y), \quad (10)$$

но алгоритм вычисления параметров приближения требует нахождения собственных значений и собственных функций интегральных уравнений определенного вида, что представляет собой достаточно сложную математическую задачу. Более эффективно такого рода вычисления осуществляются на основе методов аппроксимации полей многомерными сплайн-функциями.

VI. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ БИКУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

В теории базисных сплайнов (B -сплайнов) разработаны методы определения параметров многомерных аппроксимирующих структур, не требующие решения систем алгебраических уравнений.

Таблица 4.

Значения температурного поля $T(x, y)$

x, y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	48,0	90,9	94,8	99,5	104,3	111,0	118,2	123,4	128,7	135,9	162,9
1	110,0	98,0	102,8	107,6	113,5	117,3	124,0	129,5	134,4	142,8	158,4
2	141,3	112,4	116,9	121,7	128,2	126,9	134,1	139,9	143,3	153,1	166,2
3	158,5	150,3	154,9	159,6	156,0	160,7	168,8	173,4	178,9	189,1	174,3
4	181,4	161,5	165,8	170,1	177,9	183,1	190,2	195,8	200,0	210,3	215,9
5	204,4	208,1	212,3	217,9	221,2	227,8	234,4	239,0	241,2	246,9	251,2
6	246,5	170,3	161,9	165,0	175,4	180,1	185,3	180,9	198,0	200,3	210,1
7	262,7	149,8	153,0	158,6	161,1	170,3	165,9	165,2	174,1	180,7	165,8
8	298,6	110,9	115,0	124,8	130,2	124,7	130,0	128,5	137,8	148,9	158,9
9	309,11	92,0	96,2	100,0	110,3	115,9	118,2	115,2	123,9	136,8	146,2
10	317,2	90,1	93,0	92,7	90,3	100,2	90,2	100,4	103,8	90,0	90,1

Для двумерных полей разложение $T(x, y)$ имеет вид:

$$T(x, y) \cong S_{m,m}(x, y) = \sum_{i=-m}^{n_1+m} \sum_{k=-m}^{n_2+m} b_{ik} B_i(x) B_k(y), \quad (11)$$

где m – степень сплайна, n_1 – число узлов по оси x , n_2 – число узлов по оси y , b_{ik} – коэффициенты разложения.

В Таблице 4. Приведены значения температурного поля $T(x, y)$ для $x = 10$ см, $y = 10$ см, расстояние между отсчетами равен 10 мм.

График температурного поля $T(x, y)$ приведена на Рис.2. На Рис. 3. приведены результаты моделирования температурного поля $T(x, y)$ с помощью бикубического сплайна. Метод определения параметров многомерных аппроксимирующих сплайнов не требует решения систем уравнений.

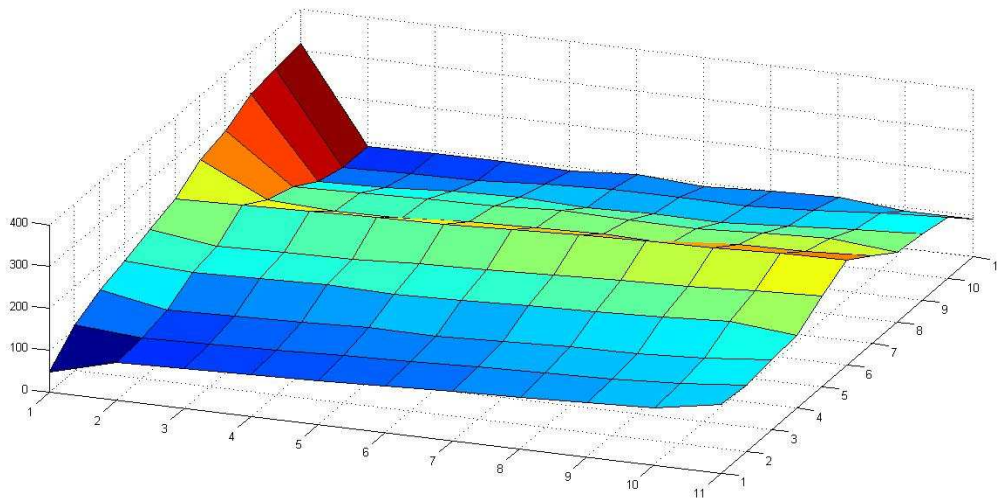


Рис. 2. График температурного поля печатной платы $T(x, y)$

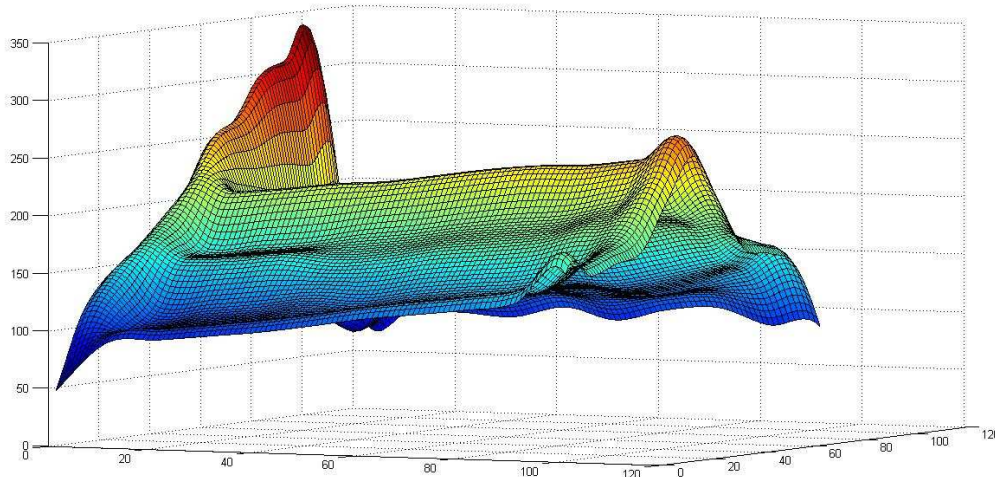


Рис.3. Результаты моделирования температурного поля $T(x, y)$ с помощью бикубического сплайна

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный в статье метод аппроксимации значения температур ПП бикубическими сплайнами позволяет устранить указанный недостаток и заменить непрерывную функцию двух переменных комбинацией функций,

каждая из которых зависит от одной переменной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Стешенко В.Б. Программное обеспечение анализа тепловых режимов печатных плат BetaSoft Board – Схемотехника, №3, 2001.

- [2] Kimberly Bobish CAE for thermal management of aerospace electronic boards using the BetaSoft program - NASA. Lewis Research Center. The Sixth Annual Thermal and Fluids Analysis Workshop, Jan 1995 - p 133-140.
- [3] Математика и САПР. Т.1 / Шенен П. и др. М.: Мир. 1988.
- [4] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир. 1972.
- [5] Тузов А.Д. Сглаживание функций, заданных таблицами // Вычислительные системы. Вып. 68. Новосибирск. 1976. С.61-66.
- [6] Арнольд В.И. О представимости функций двух переменных в виде $\chi[\phi(x)+\psi(y)]$ // Успехи матем. наук. 1957. Вып.2. С.119-121.
- [7] Шура-Бура М.Р. Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного / Вычислительная математика: сб. статей. Вып.2. М. 1957. С.3-19.
- [8] Х.Н. Зайнидинов. Сплайны в задачах обработки сигналов. Монография, Ташкентский университет информационных технологий, Т. «Fan va texnologiya», 2015, 208 С.
- [9] Вадим Жмудь, Вольфрам Хардит. Исследование погрешности восстановления сигнала по результатам его преобразования. Автоматика и программная инженерия, Новосибирск, 2017, №2(20), с.71-79.
- [10] Zayniddinov H.N, Zaynutdinova M.B, Nazirova E.Sh Methods of reconstructing signals based on multivariate spline. European Journal of Computer Science and Information Technology Vol.3, No.2, pp.52-59, May 2015. Published by European Centre for Research Training and Development UK (www.eajournals.org)
- [11] Hakimjon Zayniddinov, Madhusudan Singh, Dhananjay Singh Polynomial Splines for Digital Signal and Systems. LAMBERT Academic publishing, Germany, 2016 year, 208 p.



Хакимжон Насиридинович Зайнидинов - доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Информационных технологий Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми.
E-mail: tet2001@rambler.ru
Адрес 100200, Узбекистан, Ташкент, ул. Амира Темура, 108



Акбарович Бахрамов Сайфиддин - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры "Математическое моделирование и криптоанализ" Национального университета Узбекистана.
E-mail: m.q.a@bk.ru
Адрес: г. Ташкент-100174, Вузгородок, Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека



Кучкаров Муслимжон Адхамжон угли магистрант Информационных технологий Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми.
E-mail: muslimjon1010@gmail.com
Адрес 100200, Узбекистан, Ташкент, ул. Амира Темура, 108

Статья получена 6 февраля 2018 года.

Methods for Modeling of Thermal Fields by Bicubic Splines

H.N. Zainidinov, S.A. Bakhramov, M.A. Kuchkarov

Tashkent University of Information Technologies
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

Abstract: A method for calculating the temperature field of a printed circuit board is proposed, based on the approximation by the system of bicubic splines of sets of measured temperature values at selected points of the printed circuit board. The method makes it possible to determine the temperature of the printed circuit board at any point and can be used to calculate the temperature conditions of the printed circuit boards that are part of the coordinate-time support equipment. In the process of developing the designs of the coordinate-time support equipment (KVO), the tasks of calculating and analyzing the heat generation processes of the units and units of the KVO equipment are constantly arising, on the basis of which the choice of design solutions is made in the design of systems. Essential assistance in the analysis of thermal processes in PCB designs can be provided by specialized software that allows to carry out the necessary calculations in the early stages of the design of CWO equipment and accessible to a user who does not have special training. For the analysis of the thermal regimes of the PP equipment of the CWO, it is proposed to use the software (software) BetaSoft Board from Dynamic Soft

Analysis Inc (USA). The program has a developed mathematical apparatus, which allows to conduct a full-fledged 3D simulation of the phenomena of heat transfer to PP. The accuracy of the simulation is about 10% compared to full-scale tests. However, for all the positive sides of the BetaSoft Board software, it is difficult to determine the temperature value at a given PP point, since all calculations are output as temperature gradients in certain intervals, i.e. in fact, accurate temperature values are only available at the boundaries of temperature zones. The method of approximating the PP temperature values by bicubic splines, considered in the article, allows us to eliminate this disadvantage and replace the continuous function of two variables by a combination of functions, each of which depends on one variable.

Key words: heat field model, printed circuit board, temperature distribution, plane, approximation, bicubic spline, coordinate-time provision.

REFERENCES

- [1] Steshenko V.B. Programmnoe obespechenie analiza teplovyh rezhimov pechatnyh plat BetaSoft Board – Shemotekhnika, №3, 2001.
- [2] Kimberly Bobish CAE for thermal management of aerospace electronic boards using the BetaSoft program - NASA. Lewis Research Center. The Sixth Annual Thermal and Fluids Analysis Workshop, Jan 1995 - p 133-140.
- [3] Matematika i SAPR. T.1 / Shenon P. i dr. M.: Mir. 1988.
- [4] Alberg Dzh., Nil'son Je., Uolsh Dzh. Teoriya splajnov i ee prilozheniya. M.: Mir. 1972.
- [5] Tuzov A.D. Sglazhivanie funkciy, zadannyh tablicami // Vychislitel'nye sistemy. Vyp. 68. Novosibirsk. 1976. S.61-66.
- [6] Arnol'd V.I. O predstavimosti funkciy dvuh peremennyh v vide $\chi[\varphi(x)+\psi(y)]$ // Uspehi matem. nauk. 1957. Vyp.2. S.119-121.
- [7] Shura-Bura M.R. Approksimatsiya funkciy mnogih peremennyh funktsiyami, kazhdaya iz kotoryh zavisi ot odnogo peremennogo / Vychislitel'naya matematika: sb. statej. Vyp.2. M. 1957. S.3-19.
- [8] H.N. Zajnidinov. Splajny v zadachah obrabotki signalov. Monografiya, Tashkentskij universitet informatsionnyh tekhnologiy, T. «Fan va tekhnologiya», 2015, 208 S.
- [9] Vadim Zhmud', Vol'fram Hardit. Issledovanie pogreshnosti vosstanovleniya signala po rezul'tatam ego preobrazovaniya. Avtomatika i programmnaya inzheneriya, Novosibirsk, 2017, №2(20), s.71-79.
- [10] Zaynidinov H.N, Zaynutdinova M.B, Nazirova E.Sh Methods of reconstructing signals based on multivariate spline. European Journal of Computer Science and Information Technology Vol.3, No.2, pp.52-59, May 2015. Published by European Centre for Research Training and Development UK (www.eajournals.org)
- [11] Hakimjon Zayniddinov, Madhusudan Singh, Dhananjay Singh Polynomial Splines for Digital Signal and Systems. LAMBERT Academic publishing, Germany, 2016 year, 208 p.



Xakimjon Nasridinovich Zayniddinov is Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Information Technologies of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khorezmi.
E-mail: tet2001@rambler.ru
Address 100200, Uzbekistan, Tashkent, Amir Temur, 108



Saifiddin Akbarovich Bakhramov - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Modeling and Cryptanalysis of the National University of Uzbekistan.
E-mail: m.q.a@bk.ru
Address: Tashkent-100174, Vuzgorodok, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek



Muslimjon Adhamjon ugli Kuchkarov
Master of Information Technologies of Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khorezmi.
E-mail: muslimjon1010@gmail.com
Address 100200, Uzbekistan, Tashkent, Amir Temur, 108

The paper was received on February 6, 2018.