

УДК 519.2

# Оптимизация мультипликативных алгоритмов вейвлет-фильтрации изображений

Ю.Е. Воскобойников<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО Новосибирский государственный технический университет, просп. Карла Маркса, д.20, Новосибирск, Россия

*Аннотация:* В последнее время появились публикации, посвященные так называемым мультипликативным алгоритмам вейвлет-фильтрации. В этих алгоритмах для каждого коэффициента разложения зашумленного сигнала определяется свой «индивидуальный» фильтрующий множитель. При этом учитывается энергия коэффициентов разложения, находящихся в некоторой близости от обрабатываемого коэффициента разложения. Однако, для эффективной минимизации ошибок вейвлет-фильтрации изображений этими алгоритмами необходимо подобрать вид фильтрующего множителя и значение параметр, от которого существенно зависит ошибка фильтрации. В литературе эти два момента не получили приемлемого для практики решения. Поэтому в данной работе предлагается новый фильтрующий множитель и алгоритм оценивания оптимального параметра этого множителя. Все это позволяет получить ошибку фильтрации, меньшую по сравнению с другими множителями, приведенными в литературе и говорить об оптимизации мультипликативного алгоритма вейвлет-фильтрации в целом. Выполненные исследования показали эффективность предлагаемого подхода к оптимизации мультипликативного алгоритма фильтрации и возможность его использования на практике.

*Ключевые слова:* вейвлет-представление изображений, мультипликативные алгоритмы вейвлет-фильтрации изображений, выбор фильтрующего множителя, оценивание оптимального параметра фильтрующего множителя.

## ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В последние три десятилетия для фильтрации изображений часто используются алгоритмы вейвлет-фильтрации, основанные на обработке коэффициентов разложения зашумленного изображения в ортогональном базисе вейвлет-функций [1, 2]. Можно выделить два класса алгоритмов обработки зашумленных коэффициентов разложения: *пороговые* и *мультипликативные*.

В пороговых алгоритмах (получивших широкое распространение на практике) коэффициент разложения меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины зануляется, в противном случае такой коэффициент сохраняется или подвергается некоторому (в общем случае нелинейному) преобразованию (в зарубежной литературе такая обработка получила название *thresholding*). Пороговая величина существенно влияет на ошибку фильтрации (подробнее см. [1, 3]).

Характерной чертой мультипликативных алгоритмов является наличие *фильтрующего множителя* для каждого коэффициента разложения зашумленного изображения (такая обработка коэффициентов разложения получила название *shrinkaging*) [4, 5]. Ошибка фильтрации мультипликативных алгоритмов определяется двумя факторами: видом фильтрующего множителя и значениями

параметров, входящих в этот фильтрующий множитель. Очевидно, что подбором фильтрующего множителя и его параметров можно минимизировать ошибку фильтрации, что и составляет суть *задачи оптимизации мультипликативных алгоритмов вейвлет-фильтрации*.

В соответствующих научных публикациях эта задача не получила приемлемого (для практики) решения (особенно оценивание оптимальных параметров фильтрующего множителя). Поэтому *целью данной работы является построение эффективного фильтрующего множителя (дающего меньшую ошибку фильтрации по сравнению с известными фильтрующими множителями) и разработка алгоритма, который бы с приемлемой точностью оценивал оптимальные значения параметра этих множителей*.

## 1. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

На практике изображение задается матрицей  $F$  (уровень разложения  $j_0$ ). На первом уровне разложения этого изображения в ортогональных базисах вейвлет-функций (номер разложения  $j_0 + 1$ ) вычисляются аппроксимирующие коэффициенты  $A_1$ , детализирующие коэффициенты  $H_1$ ,  $V_1$ ,  $D_1$ . На втором уровне разложения (номер  $j_0 + 2$ ) аналогичной

обработке подвергается матрица коэффициентов  $A_1 \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2)$ . Обобщая, приходим к следующей схеме разложения [3, с. 47-51]:

$$F \rightarrow (A_1, H_1, V_1, D_1) \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2, H_1, V_1, D_1) \rightarrow \dots$$

Отметим закономерность изменения размеров двумерных массивов коэффициентов разложения, а именно: на каждом уровне разложения размеры массивов новых коэффициентов *уменьшаются в два раза* по сравнению с предыдущими массивами. При этом сумма размеров всех массивов коэффициентов равна размеру исходной матрицы  $F$ , что говорит о сохранении «объема» информации, содержащейся в  $F$ .

Было показано (см. например [3, с. 59-60]), что при разложении зашумленного изображения ошибки вычисления детализирующих коэффициентов на 2 порядка и более выше по сравнению с аппроксимирующими коэффициентами. Поэтому на втором этапе вейвлет-фильтрации обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты. Для удобства дальнейшей записи алгоритмов обработки любой из детализирующих коэффициентов будем обозначать как  $\tilde{d}_{n,m}$ , где индексы  $n, m$  определяют номер строки и столбца соответствующей матрицы коэффициентов разложения (номер уровня разложения при этом  $j$  опускается).

Общим недостатком пороговых алгоритмов обработки (часто используемых на практике) является то, что все коэффициенты некоторого уровня разложения обрабатываются с одной (или двумя) одинаковыми пороговыми величинами, что не позволяет учитывать «энергию» каждого коэффициента разложения при его обработке. Поэтому в ряде публикаций был предложен подход, который в определенной степени устраняет этот недостаток и учитывает энергию коэффициентов разложения, находящихся в некоторой близости от обрабатываемого коэффициента разложения.

Изложим один из таких алгоритмов [5] применимо к фильтрации изображений. Определим апертуру  $B_{n,m}$ , которая включает в себя коэффициенты разложения  $\tilde{d}_{p,q}$  зашумленного изображения (номер уровня разложения опускается) с индексами:

$$n-L \leq p \leq n+L, \quad m-L \leq q \leq m+L,$$

т.е. коэффициенты  $\tilde{d}_{p,q}$  принадлежат квадрату с центром в точке  $(n, m)$  и длинами сторон  $(2L+1)$ ,  $L$  - параметр апертуры. Общее число

коэффициентов, попавших в апертуру равно  $M = (2L+1)^2$ . Далее введем величину

$$S_{n,m}^2 = \sum_{p,q \in B_{n,m}} \tilde{d}_{p,q}^2 \quad (1)$$

и запишем алгоритм обработки коэффициента  $\tilde{d}_{n,m}$  в виде:

$$\hat{d}_{n,m} = w_{n,m}^{(1)} \cdot \tilde{d}_{n,m}, \quad (2)$$

где фильтрующий множитель  $w_{n,m}^{(1)}$  определяется выражением:

$$w_{n,m}^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{n,m} < \lambda_j^{(1)}; \\ 1 - \left( \frac{\lambda_j^{(1)}}{S_{n,m}} \right)^2, & \text{если } S_{n,m} \geq \lambda_j^{(1)}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\lambda_j^{(1)} = \sigma \sqrt{2 \cdot \ln(N_j)}$  - уровневезависимая пороговая величина,  $\sigma$  - среднеквадратическое отклонения шума регистрации изображения,  $N_j$  - общее число элементов матрицы детализирующих коэффициентов на  $j$ -ом уровне разложения. В работе [6] было показано, что этот фильтрующий множитель (3) не минимизирует ошибку фильтрации и поэтому в этой же работе была предложена модификация этого множителя путем введения параметра  $\beta$ :

$$w_{n,m}^{(1)}(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{n,m} < \beta \lambda_j^{(1)}; \\ 1 - \left( \beta \frac{\lambda_j^{(1)}}{S_{n,m}} \right)^2, & \text{если } S_{n,m} \geq \beta \lambda_j^{(1)}, \end{cases} \quad (4)$$

и предложен алгоритм вычисления оценки для оптимального параметра  $\beta_{opt}$ , минимизирующего среднеквадратическую ошибку фильтрации (СКО). Хотя множители (3), (4) учитывают энергию коэффициентов разложения в некоторой окрестности от обрабатываемого коэффициента разложения, но они не учитывают интегральные спектральные характеристики всех коэффициентов разложения данного уровня и относительный вклад в эти характеристики обрабатываемого коэффициента. Заметим, что и другие фильтрующие множители не свободны от этого недостатка [7,8].

Поэтому в данной работе предлагается фильтрующий множитель вида:

$$w_{n,m}^{(2)}(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{n,m} < \beta \lambda_j^{(2)}; \\ 1 - \left( \beta \frac{\lambda_j^{(2)}}{S_{n,m}} \right)^j, & \text{если } S_{n,m} \geq \beta \lambda_j^{(2)}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } \lambda_j^{(2)} = \sigma \cdot \frac{S_{\max} - S_{n,m}}{S_{\max} + S_{\min}} \sqrt{\ln\left(\frac{\hat{N}_j}{j}\right)}, \quad \hat{N}_j = \frac{\sqrt{N_j}}{j},$$

$$S_{\max} = \sqrt{\max\{S_{n,m}^2\}}, \quad S_{\min} = \sqrt{\min\{S_{n,m}^2\}}. \text{ Видно,}$$

что множитель (5) также содержит параметр  $\beta$ , который нужно определить из условия минимума СКО.

Для этого обратимся к критерию оптимальности параметрического алгоритма фильтрации [3, с. 111-113]. Хотя критерий имеет строгое обоснование только для линейных алгоритмов, но он позволял достаточно точно оценить оптимальные пороговые величины пороговых функций нелинейных алгоритмах вейвлет-фильтрации [9]. Приведем основные расчетные соотношения для оценивания  $\beta_{opt}$  (подробнее см. [3,9]).

Введем следующую статистику:

$$\rho_w(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} (\tilde{f} - \hat{f}(\beta))^T \cdot \tilde{f},$$

где  $\tilde{f}$  - вектор составленный из столбцов «зашумленной» матрицы изображения  $\tilde{F}$ ,  $\hat{f}(\beta)$  - вектор составленный из столбцов матрицы  $\hat{F}(\beta)$  - результата вейвлет-фильтрации с использованием фильтрующего множителя  $w_{n,m}(\beta)$  с заданной величиной параметра  $\beta$ . В качестве оценки для  $\beta_{opt}$  примем величину  $\beta_w$ , для которой выполняется неравенство:

$$\vartheta_{\frac{\alpha}{2}, N} < \rho_w(\beta_w) < \vartheta_{1-\frac{\alpha}{2}, N}, \quad (6)$$

$\vartheta_{\frac{\alpha}{2}, N}, \vartheta_{1-\frac{\alpha}{2}, N}$  - квантили  $\chi^2$ -распределения с числом степеней свободы  $N$  уровней  $\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}$  соответственно,  $\alpha$  - вероятность ошибки первого рода при проверке статистической гипотезы об оптимальности значения  $\beta_w$  (обычно  $\alpha = 0.05$ );  $N$  - общее число элементов фильтруемой матрицы  $\tilde{F}$ . Вычисленное значение  $\beta_w$  подставляется в выражение (5).

Заметим, что вычисление  $\beta_w$  сводится к решению уравнения

$$\rho_w(\beta) = N.$$

Итерационный процесс решения этого нелинейного уравнения (вычисляется последовательность приближенных решений  $\beta^{(n)}$ ) прекращается, как только  $\rho_w(\beta^{(n)})$  удовлетворяет неравенству (6). Это обуславливает возможность эффективно использовать «медленные» итерационные алгоритмы (например, метод дихотомии - деление отрезка пополам). Как правило, при

обработке изображений  $N > 30$  и границы неравенства (5) при  $\alpha = 0.05$  вычисляются по формулам:

$$\vartheta_{0.025, N} = N - 1.96\sqrt{2N}, \quad \vartheta_{0.975, N} = N + 1.96\sqrt{2N}.$$

Это следует из того факта, что при  $N > 30$   $\chi^2$ -распределение с числом степеней свободы  $N$  хорошо аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $N$  и дисперсией  $2N$ .

Если дисперсия шума  $\sigma^2$  неизвестна, то можно использовать ее оценку

$$\hat{\sigma}^2 = \left[ \frac{\text{median}\{\tilde{d}\}}{0.06745} \right]^2, \quad \text{где } \text{median}\{\tilde{d}\} -$$

вычисление медианы модулей диагональных детализирующих коэффициентов первого уровня разложения. Показано [3, с. 76], что эта оценка имеет приемлемую точность (погрешность оценивания составляет 8%-10%).

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОЦЕНКИ $\beta_w$

Перейдем к исследованию свойства оптимальности оценки  $\beta_w$ . Для этого был проведен обширный вычислительный эксперимент по фильтрации изображений с различными частотными свойствами. Остановимся только на результатах фильтрации изображения *LENA* (Рис. 1), которое является стандартным изображением при тестировании алгоритмов обработки двумерных сигналов. В качестве вейвлетов использовались ортогональные вейвлеты Добеши [8].



Рис. 1. Тестовое изображение LENA

Точные значения изображения искажались нормально распределенным шумом измерений с нулевым средним и дисперсией, вычисляемой по задаваемому относительному уровню шума,

определяемому выражением  $\delta = \frac{\|\tilde{F} - F\|}{\|F\|}$ , где

$\|\cdot\|$  - евклидова норма матрицы. Точность фильтрации характеризовалась относительной ошибкой  $\delta_{\hat{F}}(\beta) = \frac{\|\hat{F}_{\beta} - F\|}{\|F\|}$ , где  $\hat{F}_{\beta}$  - изображение, отфильтрованное с множителем (5) при заданном параметре  $\beta$ .

На Рис. 2 приведены результаты исследований точности фильтрации изображения с относительным уровнем шума  $\delta = 0.06$ , размер апертуры задавался  $5 \times 5$ . Сплошной линией показана зависимость относительной ошибки фильтрации  $\delta_{\hat{F}}(\beta)$  от величины параметра  $\beta$ , точечной кривой - зависимость  $\rho_w(\beta)$ , пунктирными прямыми границы интервала (6) (из-за масштаба рис. 2 они слились в одну прямую). Значения  $\beta_w$ , для которых  $\rho_w(\beta_w)$  находится между пунктирными прямыми (на рис.  $\rho_w(\beta_w)$  пересекает пунктирную линию) могут приняты в качестве оценок для оптимального значения  $\beta_{opt}$ . Видно, что эти значения  $\beta_w$  соответствуют минимальным значениям ошибки фильтрации, что графически показывает эффективность оценки  $\beta_w$  в фильтрующем множителе (5).

В качестве количественной характеристики точности оценки  $\beta_w$  введем коэффициент эффективности, определяемый выражением  $E = \frac{\delta_{\hat{F}}(\beta_{opt})}{\delta_{\hat{F}}(\beta_w)}$ . Очевидно, что чем больше  $E$  отклоняется от 1 к нулю, тем больше проигрыш по точности алгоритма фильтрации с параметром  $\beta_w$  по сравнению с минимально возможной ошибкой  $\delta_{\hat{F}}(\beta_{opt})$ .

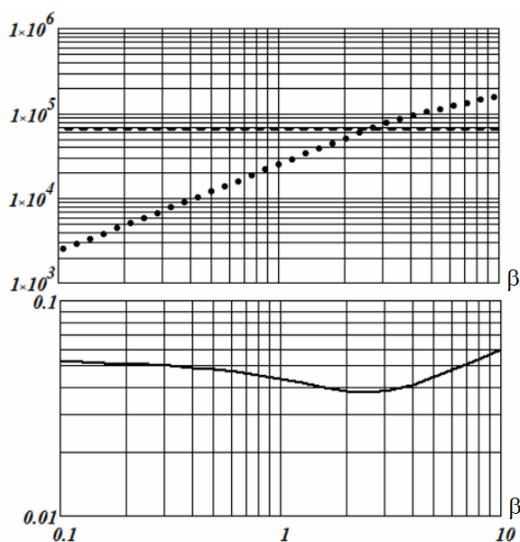


Рис. 2. К эффективности оценки  $\beta_w$

Величина  $E$  является случайной величиной и для вычисления ее среднего значения был проведен вычислительный эксперимент, в котором для каждой зашумленной матрице изображения LENA

$$\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}, l = 1, 2, \dots, N_{sam} = 50,$$

вычислялись отфильтрованные изображения  $\hat{F}_{\beta_w}^{(l)}$ ,  $\hat{F}_{\beta_{opt}}^{(l)}$  и по

ним определялось значение  $E^{(l)}$  -  $l$ -ый элемент выборочной совокупности  $\{E^{(l)}\}, l = 1, 2, \dots, N_{sam}$ .

По этой выборочной совокупности находились: среднее значение  $\bar{E}$ , минимальное значение  $E_{min}$ , максимальное значение  $E_{max}$ , приведенные в таблице для разных уровней шума  $\delta$ . Примерно такие же результаты были получены и при фильтрации других тестовых изображений. Сравнение величин  $\delta_{\hat{F}}(\beta_{opt})$  для множителей (4), (5) показало меньшую (на 5-10%) минимальную ошибку фильтрации с использованием множителя (5).

Таблица.

Коэффициенты эффективности оценки  $\beta_w$

$\delta$	$E_{min}$	$\bar{E}$	$E_{max}$
0.02	0.813	0.923	0.993
0.05	0.839	0.949	0.994
0.10	0.883	0.963	0.995

## ВЫВОДЫ

Анализируя числовые характеристики коэффициента эффективности, приведенные в таблице, можно сделать следующие выводы:

- фильтрующий множитель (5) имеет большую потенциальную точность по сравнению с часто используемым множителем (4) (при параметре  $\beta = \beta_{opt}$ );

- предложенный выбора параметра множителя (5) позволяет достаточно точно оценить оптимальное значение  $\beta_{opt}$ , не привлекая при этом априорную информацию о фильтруемом изображении.

Учитывая выше сказанное, можно рекомендовать использовать мультипликативный алгоритм вейвлет-фильтрации (2) с фильтрующими множителями  $w^{(2)}(\beta_w)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mallat S. A. Wavelet tour of signal processing: the sparse way. Academic Press, 2008. 621 p.
- [2] Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MatLAB. М.: ДМК, 2005. 304 с.
- [3] Воскобойников Ю. Е. Алгоритмы вейвлет-фильтрации с примерами в пакете MathCAD. Palmarium Academic Publishing, 2016. 196 с.
- [4] Chen G.Y. Multiwavelet denoising using neighboring coefficients. IEEE Signal Processing Letters. 2003. vol.10. no.7. P. 211-214.
- [5] Rao B.C., Latha M.M. Selective neighboring wavelet coefficients approach for image denoising. International journal of computer science and communication. 2011. vol. 2. no. 1. P. 73-77.
- [6] Воскобойников Ю.Е. Оценивание оптимальных параметров одного класса мультипликативных алгоритмов вейвлет-фильтрации изображений // Автотриметрия. 2017. т. 53. № 4. С. 112-119.
- [7] Krishna G., Nagarjuna R., Dhanaraj C. An adaptive wavelet thresholding image denoising method using neighboring wavelet coefficients. International journal of innovation research in engineering & science. 2013. vol. 9. no. 2. P. 46-59.
- [8] Om H., Biswas M. An improved image denoising method based on wavelet thresholding. Journal of Signal and Information Processing. 2012. vol.3. no. 1. P. 109-116.
- [9] Voskoboynikov Yu. E. Estimating optimum threshold sizes in a wavelet-filtration algorithms. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2011. vol. 47. no. 2. P. 3–14.



**Юрий Евгеньевич Воскобойников**, выпускник кафедры автоматизации НГТУ (НЭТИ), доктор физ.-мат. наук, профессор, Заслуженный работник Высшей школы РФ, Соросовский профессор, действительный член МАИ,

РАЕ, МАН ВШ, заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин), профессор кафедры автоматизации НГТУ. Автор более 295 публикаций, 6 монографий, посвященных решению некорректных задач интерпретации данных и обработке сигналов и изображений, и большого числа учебников и учебных пособий.

Новосибирск, 530073, просп. К. Маркса, д.20

E-mail: [voscob@mail.ru](mailto:voscob@mail.ru)

Новосибирск, 630073, просп. К. Маркса, д. 20, НГТУ

Статья поступила 08.02.2019

## Optimization of Multiplicative Image Wavelet Filtering Algorithms

Yu.E. Voskoboynikov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Novosibirsk State Architectural and Construction University (Sibstrin), Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>FGBOU VO Novosibirsk State Technical University, prosp. Karl Marx, 20, Novosibirsk, Russia

*Abstract:* recently, there have been publications devoted to the so-called multiplicative algorithms of wavelet filtering. In these algorithms for each coefficient of decomposition of the noisy signal the "individual" filtering factor is defined. This takes into account the energy of the expansion coefficients, which are in some proximity to the processed expansion coefficient. However, to effectively minimize the errors of wavelet filtering of images by these algorithms, it is necessary to choose the type of filtering factor and the value of the parameter, on which the filtering error depends significantly. In the literature, these two points have not received a practical solution. Therefore, in this paper we propose a new filtering factor and an algorithm for estimating the optimal parameter. All this makes it possible to obtain a filtering error smaller in comparison with other factors given in the literature and talk about the optimization of the multiplicative wavelet filtering algorithm as a whole. The performed studies showed the effectiveness of the proposed approach to optimize a multiplication filtering algorithm and the possibility of its use in practice.

*Key words:* wavelet representation of images, multiplicative algorithms of wavelet filtering of images, selection of the filtering factor, estimation of the optimal parameter of the filtering factor.

## REFERENCES

- [1] Mallat S. A. Wavelet tour of signal processing: the sparse way. Academic Press, 2008. 621 p.
- [2] Smolentsev N. K. Osnovy teorii veyvletov. Veyvlety v MatLAB. М.: ДМК, 2005. 304 с.
- [3] Voskoboynikov YU. Ye. Algoritmy veyvlet-fil'tratsii s primerami v pakete MathCAD. Palmarium Academic Publishing, 2016. 196 с.
- [4] Chen G.Y. Multiwavelet denoising using neighboring coefficients. IEEE Signal Processing Letters. 2003. vol.10. no.7. P. 211-214.
- [5] Rao B.C., Latha M.M. Selective neighboring wavelet coefficients approach for image denoising. International journal of computer science and communication. 2011. vol. 2. no. 1. P. 73-77.
- [6] Voskoboynikov YU.Ye. Otsenivaniye optimal'nykh parametrov odnogo klassa mul'tiplikativnykh algoritmov veyvlet-fil'tratsii izobrazheniy // Avtometriya. 2017. т. 53. № 4. С. 112-119.

- [7] Krishna G., Nagarjuna R., Dhanaraj C. An adaptive wavelet thresholding image denoising method using neighboring wavelet coefficients. International journal of innovation research in engineering & science. 2013. vol. 9. no. 2. P. 46-59.
- [8] Om H., Biswas M. An improved image denoising method based on wavelet thresholding. Journal of Signal and Information Processing. 2012. vol.3. no. 1. P. 109-116.
- [9] Voskoboinikov Yu. Ye. Estimating optimum threshold sizes in a wavelet-filtration algorithms. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2011. vol. 47. no. 2. P. 3–14.



**Yury Voskoboinikov**, doctor of physical and mathematical sciences. in Economics, Professor, Honored Worker of the Higher School of Russia, Soros Professor, Full Member of the MAI, RAE, MAN VS, Professor, Automation Department, NSTU.

Head of the Department of Applied Mathematics of the

Novosibirsk State Architectural and Construction University (Sibstrin). He is the author of more than 300 scientific publications, 6 monographs devoted to solving ill-posed problems of data interpretation and signal and image processing, 16 textbooks and teaching aids.

E-mail: [voscob@mail.ru](mailto:voscob@mail.ru)

Novosibirsk, 630073, str. Prosp. K. Marksa, h. 20, NSTU

The paper was received on 02.08.2019.