Высокочастотная асимптотика линейной САУ: соотношение порядков объекта и регулятора

В.А. Жмудь, А.Д. Рыбка

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. Достаточно сложным вопросом теории автоматического управления является вопрос о том, как ведет себя идеальная линейная система фиксированного порядка с тем или иным регулятором в различных ситуациях, а именно: в чистой теории при попытке отыскания идеальной настройки регулятора, на практике, при численном моделировании по шагам, а также при моделировании с коррекцией шага дискретизации в цикле. Во всех этих случаях, как выясняется, система ведет себя по-разному, но это не является основанием для утверждения о том, что теория не совпадает с практикой, или что практика – это одно, а моделирование – это другое. Если практика не совпадает с теорией, следовательно, теория не точна или не полна. Поскольку было бы ошибочным полагать, что теория автоматического управления не полна, необходимо указать на те особенности ее применения, при которых ее предсказания не совпадают с практикой, предложить методику, при которой ее предсказания выполнялись бы с высокой точностью. Этот вопрос решается путем рассмотрения асимптотического поведения линейных систем в области высоких частот. Понимание особенностей этого поведения и различного механизма влияния этих особенностей в чистой теории, при моделировании по шагам и на практике позволяет сформулировать необходимые уточнения к модели объекта при оптимизации, а также уточнить методику решения линейной задачи управления с учетом этих особенностей.

Ключевые слова. Управления, оптимизация, регулятор, контроллер, линейные системы, асимптотика, полином

Введение

Одним из труднейших вопросов для восприятия студентов является вопрос о том, как ведет себя объект порядка n с регулятором того или иного вида при неограниченном росте общего коэффициента в контуре управления.

Этот вопрос является краеугольным в теории автоматического управления, без понимания метода его решения применение численной оптимизации для вычисления регулятора может окончиться ошибочным решением [1–4]. Исследователь, не понимающий всех тонкостей этой задачи, может тратить время на решение задачи в том виде, в котором задача решения не имеет. Также необходимо понимать, что отсутствие решения задачи в том виде, в котором она сформулирована, подчас отнюдь не означает невозможность решить формально иную, но, по существу, эту же самую задачу, достаточно эффективно. Недостаточность понимания этой проблемы можно встретить довольно часто. Так в некоторых случаях специалисты пытаются рассчитать наилучший или «оптимальный» ПИД-регулятор для линейного объекта второго порядка, мы покажем, что подобная постановка задачи не имеет математического смысла, тогда как рассчитать достаточно хороший регулятор для такой системы вполне можно, эта задача решается относительно просто, но не в указанной постановке. При отмеченной постановке любое решение будет ошибочным, поскольку для объекта второго порядка теоретически не существует оптимального в самом общем смысле ПИД-регулятора. Это следует понимать так, что какой бы ни был найден ПИД-регулятор, всегда можно указать другой, с которым система будет работать лучше. Это утверждение может быть справедливым лишь для чисто теоретической задачи, сформулированной в терминах без каких-либо оговорок о полосе частот, в которой данная математическая модель объекта адекватна. На практике такого быть не может, поскольку не может существовать объект, адекватно описываемый моделью второго порядка во всем бесконечном диапазоне частот. Обязательно имеет место дополнительные фильтры более высокого порядка, а также чистое запаздывание.

Статья рассматривает эти аспекты более детально.

1. Предлагаемый термин «Асимпптотический порядок»

Под порядком в данном случае понимается асимптотический порядок объекта [5].

Если передаточная функция объекта представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся полиномы от s, причем порядок числителя равен n, а порядок знаменателя равен m, то асимптотический порядок объекта равен $N = n – m$.

Действительно, пусть передаточная функция объекта имеет вид:

$$W_U(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_o + a_1 s + \ldots + a_n s^n} . \qquad (1)$$

Вынесем за скобки в числителе и знаменателе s в старшей степени, получим:

$$W_U(s) = \frac{s^m(b_0 s^{-m} + b_1 s^{-m+1} + \ldots + b_m)}{s^n(a_o s^{-n} + a_1 s^{-n+1} + \ldots + a_n)} . \quad (2)$$

Сократим лишние множители и получим:

$$W_U(s) = \frac{(b_0 s^{-m} + b_1 s^{-m+1} + \ldots + b_m)}{s^{n-m}(a_o s^{-n} + a_1 s^{-n+1} + \ldots + a_n)} . \quad (3)$$

Верхние частоты соответствуют увеличению s, а асимптотическое поведение передаточной функции (3), равной (1) получается при $s \to \infty$. Видно, что в этом случае в каждой из скобок все члены, кроме последнего, стремятся к нулю, то есть остается следующее:

$$\lim_{s\to\infty} W_U(s) = \frac{b_m}{s^{n-m} a_n} . \quad (4)$$

С учетом введенного обозначения как раз и получаем:

$$\lim_{s\to\infty} W_U(s) = \frac{b_m}{s^N a_n} . \quad (5)$$

2. Каков порядок ПИД-регулятора

В общем виде для ПИД-регулятора привычно писать следующее соотношение:

$$W_{PID}(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s . \quad (6)$$

Приведем к общему знаменателю и получим:

$$W_{PID}(s) = \frac{k_P s + k_I + k_D s^2}{s} . \quad (7)$$

Исходя из этого, асимптотический порядок ПИД-регулятора равен $N_{\text{PID}} = -1$.

Общее правило: если модель объекта представляет собой произведение нескольких передаточных функций, то итоговая передаточная функция – это их произведение. Следовательно, **асимптотические порядки складываются** (алгебраически).

Для вычисления асимптотического порядка разомкнутого контура **достаточно сложить порядки объекта и регулятора**, поскольку их передаточные функции перемножаются.

Мы анализируем ЛАЧХ разомкнутого контура при увеличении всех коэффициентов усиления регулятора.

Например, если АП объекта равен $N = 5$, АП регулятора равен $N_{\text{PID}} = -1$, тогда АП разомкнутого контура равен $N_{\text{U}} = 5 - 1 = 4$.

Если, то наклон высокочастотной части ЛАЧХ (то есть той части, где s стремится к бесконечности), равен 20 N_{U} = 80 *дБ/дек*.

В этом ключ к анализу. Рассмотрим, что будет, если все коэффициенты регулятора одновременно увеличиваются пропорционально множителю K.

$$W_{PID}(s) = K\frac{k_{P0} s + k_{I0} + k_{D0} s^2}{s} . \quad (7)$$

При увеличении этого коэффициента весь график ЛАЧХ будет подниматься вверх. Начиная с некоторого большого значения этого множителя, ЛАЧХ будет пересекать ось абсцисс под углом, равным произведению АП на 20 *дБ/дек.*

Если наклон равен 20 *дБ / дек*, то система остается устойчивой при $K \to \infty$.

Если наклон равен 40 *дБ / дек*, то объект остается формально на границе устойчивости при $K \to \infty$. На практике такую систему называют неустойчивой.

Если наклон равен 40 *дБ / дек* или выше, то система остается неустойчива при $K \to \infty$.

Если наклон равен нулю, или положительный, то анализ устойчивости такого контура на основании этих данных делать не корректно.

Ответ на вопрос о том, как ведет себя системы с такой передаточной функцией разомкнутого контура не может быть решен. Формально такая «система» идеальна, так как ее полоса частот бесконечно. На практике таких систем быть не может. Поэтому инженерные науки не должны заниматься решением этого вопроса.

Этот вопрос «теоретически» решается очень легко, но прикладного значения он не имеет.

Вопрос о том, как будет вести себя система при моделировании, каждый студент может решить самостоятельно.

Если АП контура равен единице или больше, контур может быть промоделирован в программе *VisSim*.

Причем, **если АП равен единице**, то процедура оптимизации остановится только тогда, когда шаг интегрирования станет уже некорректным. Если после этого шаг интегрирования дополнительно уменьшить, процедура оптимизации пойдет дальше, опять остановится только тогда, когда шаг интегрирования станет некорректным.

Если АП больше единицы, то процедура оптимизации остановится при каких-то конкретных значениях коэффициентов.

Чем выше АП, тем больше шансов, что процедура оптимизации остановится в такой точке (с таким набором коэффициентов регулятора), в которой и фактическая система будет настроена оптимально.

Порядок АП, который больше единицы, указывает на то, что сведения о модели объекта достаточны для численной оптимизации.

Если же порядок АП равен единице, то это говорит о том, что сведений о модели объекта недостаточно для получения адекватного решения, т. е. такого набора коэффициентов регулятора, который оптимален для фактического регулятора с фактическим объектом управления.

Если АП равен нулю, программа выдаст ошибку сумматора. Если АП отрицательный, тем более программа выдаст ошибку.

Если в системе имеется звено чистого запаздывания, то всегда процедура оптимизации остановится на каком-то конкретном значении коэффициентов.

Если АП равен нулю или отрицательный, процедуру оптимизации просто невозможно будет запустить в программе *VisSim*.

3. Экспериментальное исследование процесса решения некорректно поставленных задач

Рассмотрим результат оптимизации пропорционального регулятора для объекта первого порядка в виде интегратора. Стоимостная функция простейшая – интеграл от модуля ошибки, умноженного на время. Для большей корректности моделирования ступенчатый скачок будем подавать не в момент времени, равный нулю, а в момент $t = 0.1$ с.

На *Рис.* 1 показан результат моделирования системы, содержащей интегратор и пропорциональный регулятор, то есть обычный коэффициент усиления, равный единице. На *Рис.* 2 показан результат запуска программы оптимизации.

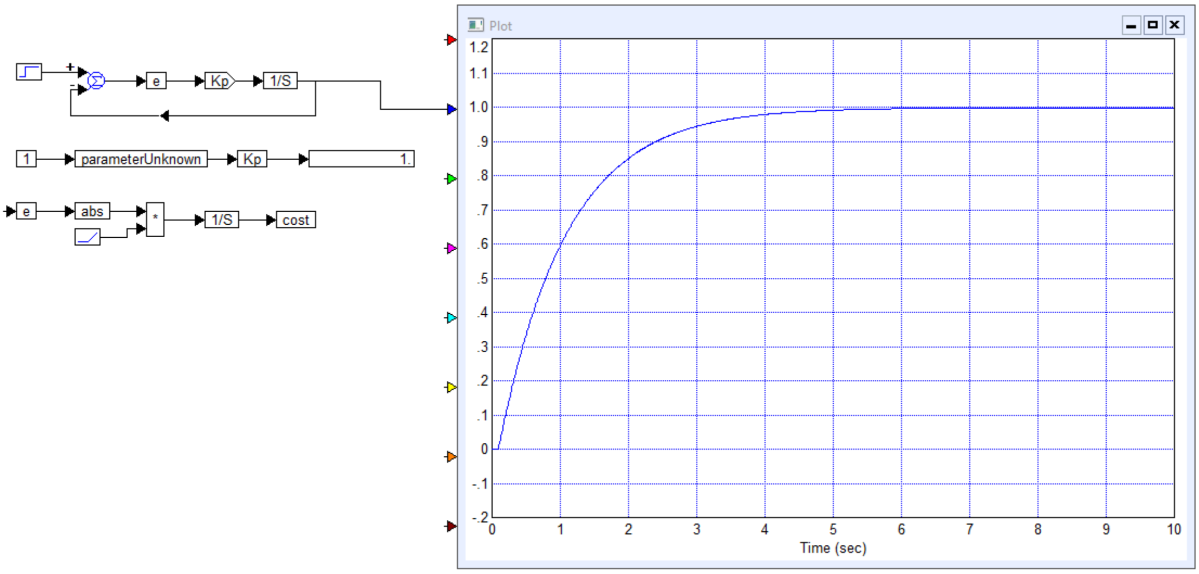

Рис. 1. При задании единичного коэффициента усиления (без оптимизации) переходный процесс устойчивый и без перерегулирования, что и следовало ожидать

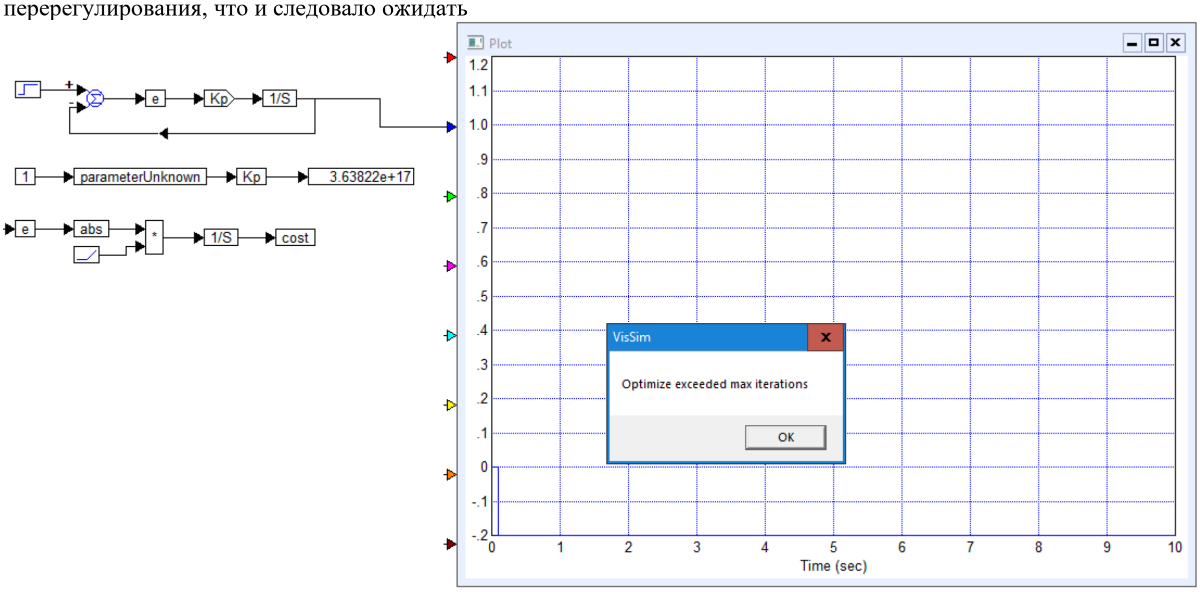

Рис. 2. После запуска программы оптимизации система длительно находится в режиме поиска решений, после чего выдает сообщение об ошибке: оптимизация превысила допустимое количество итераций

Видим, что процесс остановился, не завершившись. Появилось сообщение о том, что процесс не завершен. Такой результат не может удовлетворить проектировщика системы. Также может выдаваться сообщение о том, что одна из величин превысила максимально допустимое значение, что также является признаком неуспешности решения задачи.

Если ввести в стоимостную функцию, например, абсолютное значение коэффициента, как показано на *Рис*. 3, то оптимизация останавливается на некотором шаге, то есть задача с новой стоимостной функцией перестает быть некорректной и решается успешно.

Если ввести весовой коэффициент, много меньше единицы, удается повысить коэффициент регулятора и получить более привлекательный переходный процесс, как показано на *Рис*. 4.

Если еще сильней уменьшить весовой коэффициент, удается дополнительно повысить коэффициент регулятора и получить еще более привлекательный переходный процесс, как показано на *Рис*. 5.

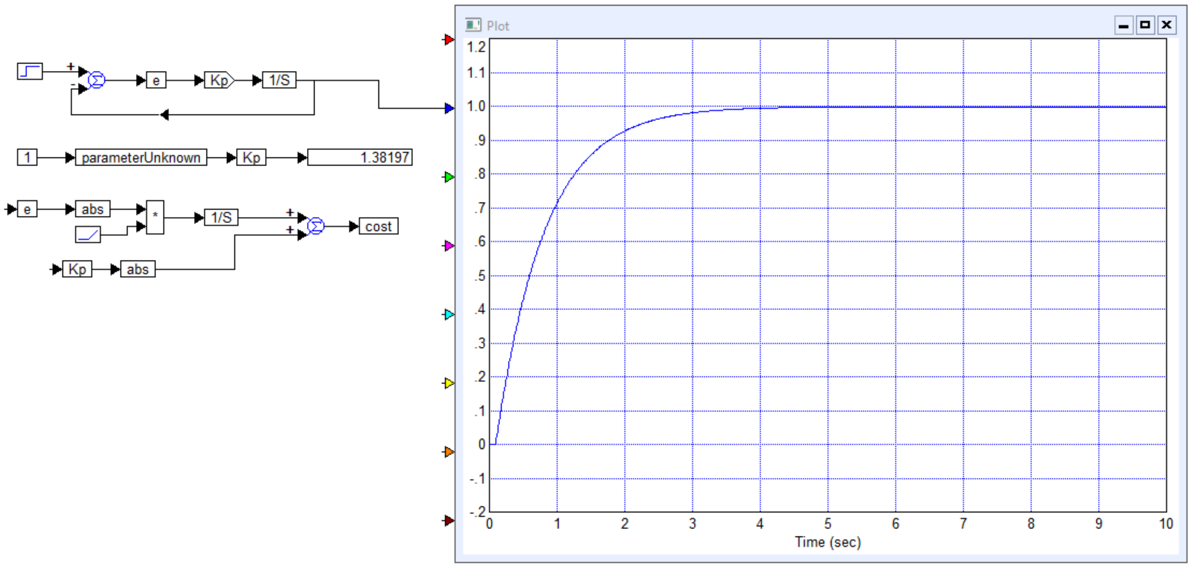

Рис. 3. Если ввести в стоимостную функцию, например, абсолютное значение коэффициента, оптимизация останавливается на некотором шаге

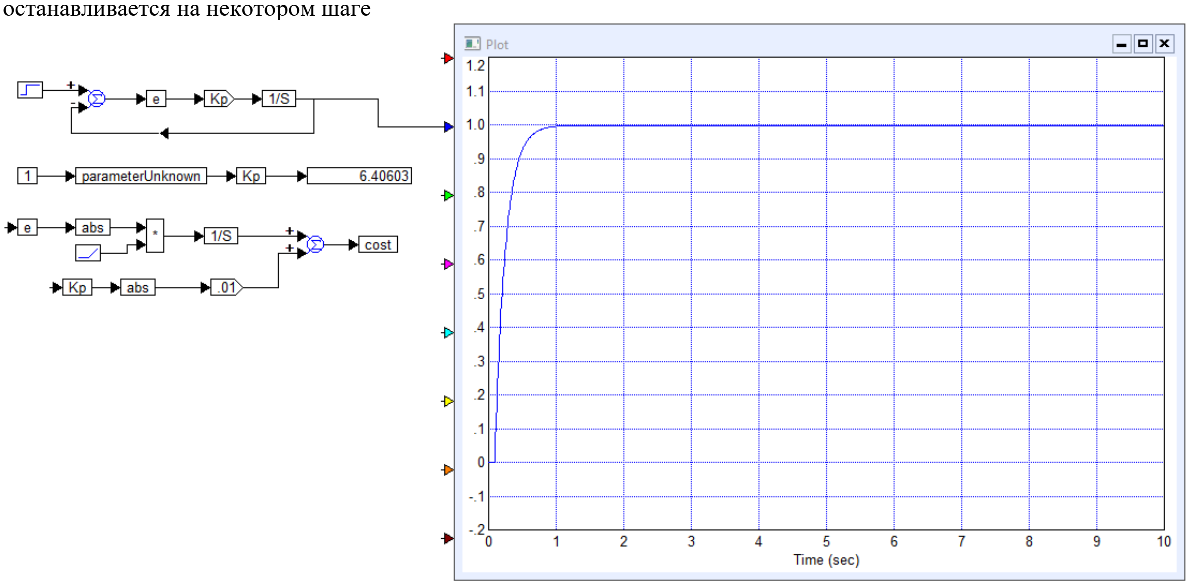

Рис. 4. Если ввести весовой коэффициент, много меньше единицы, удается повысить коэффициент регулятора и получить более привлекательный переходный процесс

Если в объекте появляется фильтр первого порядка, задача становится корректной, и она имеет решение, как показано на *Рис*. 6. Если ввести в объект звено запаздывания, задача также становится корректной, и она имеет решение, как показано на *Рис*. 7. Объект первого порядка на примере апериодического звена: задача не корректна, но программа оптимизации останавливается на каком-то промежуточном значении, как показано на *Рис*. 8.

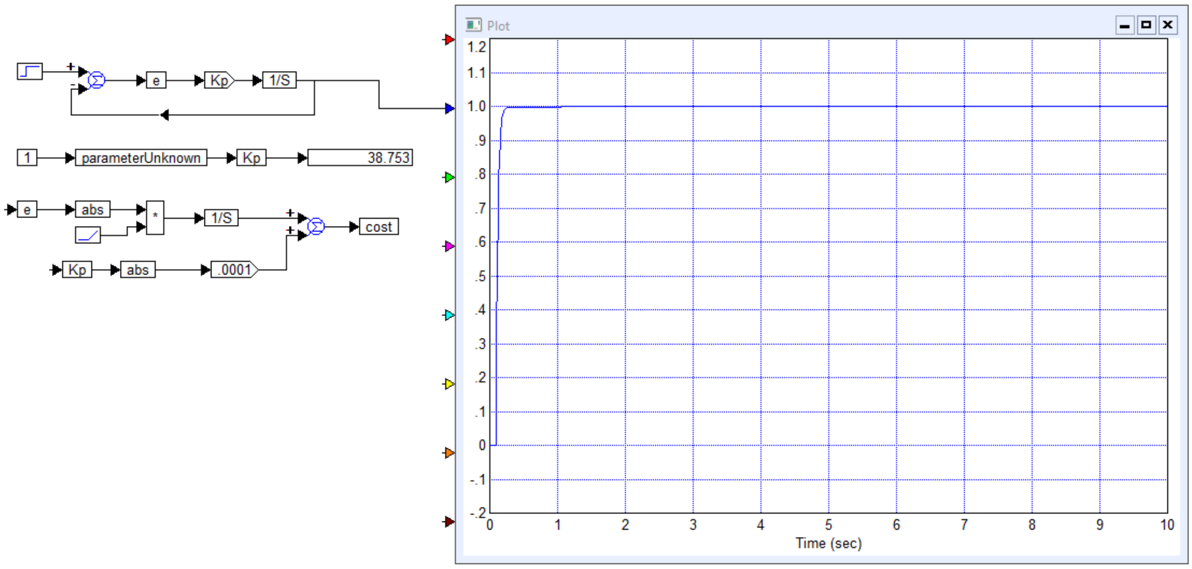

Рис. 5. Если еще сильней уменьшить весовой коэффициент, удается дополнительно повысить коэффициент регулятора и получить еще более привлекательный переходный процесс

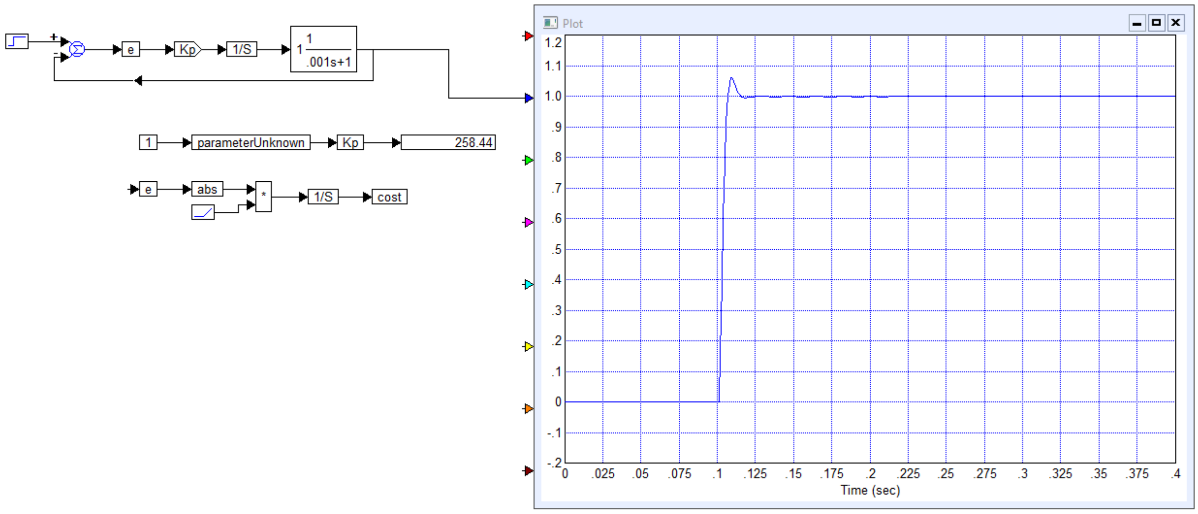

Рис. 6. Если в объекте появляется фильтр первого порядка, задача становится корректной, и она имеет решение

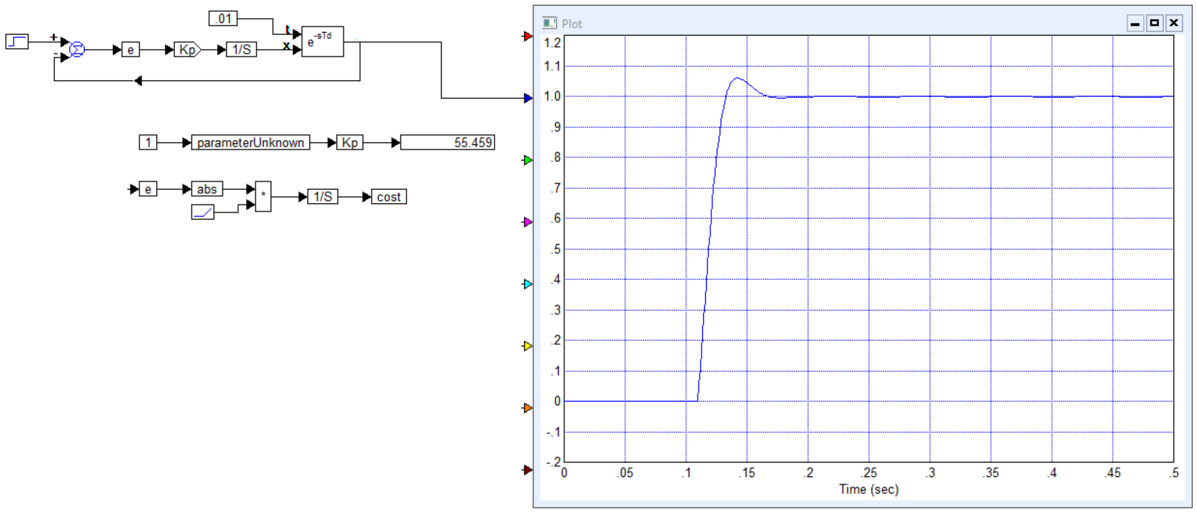

Рис. 7. Если ввести в объект звено запаздывания, задача также становится корректной, и она имеет решение

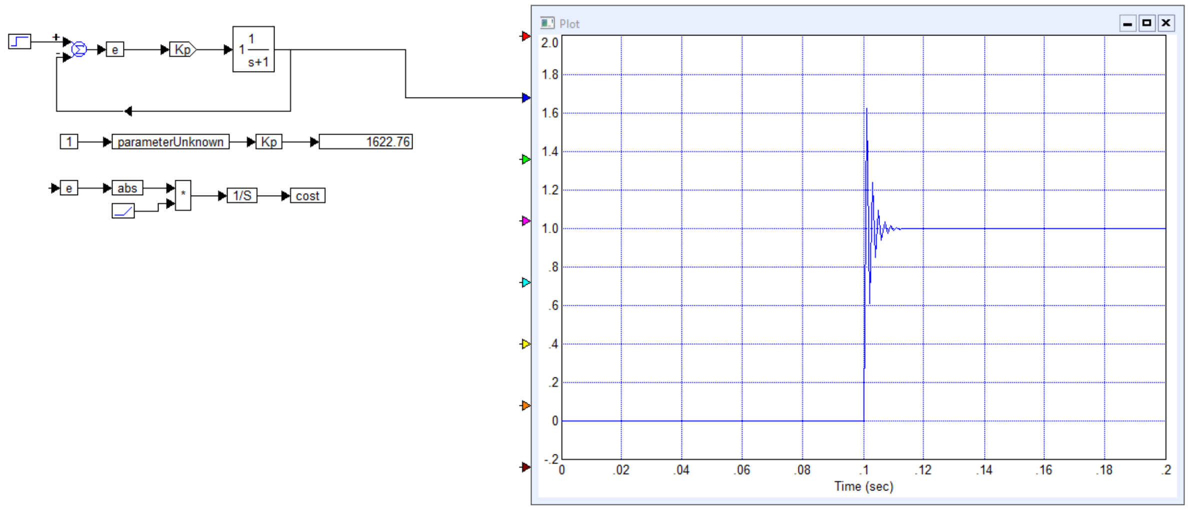

Рис. 8. Объект первого порядка на примере апериодического звена: задача не корректна, но программа оптимизации останавливается на каком-то промежуточном значении

Детальное исследование этого переходного процесса в модели по Рис.8 показывает, что моделирование некорректно, таким образом, полученное решение не корректно, как видим из графика, показанного на *Рис.* 9. Действительно, переходный процесс состоит из ломанных линий, чего быть не должно при корректном моделировании. Следовательно, результат, полученный на *Рис.* 8, некорректен. Мы обязаны уменьшить шаг дискретизации и вновь осуществить процедуру оптимизации регулятора. Результат показан на *Рис.* 10.

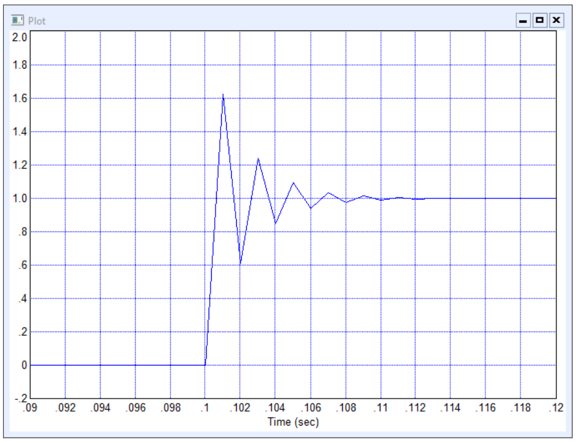

Рис. 9. Детальное исследование этого переходного процесса в модели по Рис.8 показывает, что моделирование некорректно, таким образом, полученное решение не корректно

Этот результат демонстрирует, что предыдущее решение было некорректным, поскольку новый результат отличается от старого. Но из этого не следует корректность нового решения. Если эту процедуру продолжить, снова уменьшить шаг, то мы снова получим другой результат, не совпадающий с ранее полученным. Эта процедура будет повторяться до бесконечности.

На *Рис.* 11 показано, что если в объект ввести звено запаздывания, то постановка задачи становится корректной, что продемонстрировано тем фактом, что задача решается успешно.

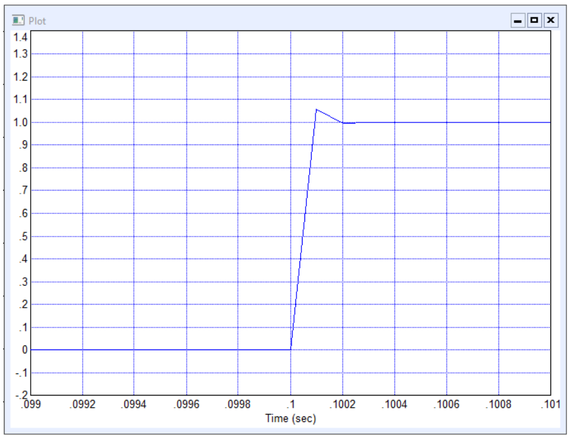

Рис. 10. Если уменьшить шаг интегрирования, решение получается другое, что демонстрирует, что предыдущее решение было некорректным

Другим примером некорректно поставленной задачи является задача оптимизации ПД-регулятора для объекта первого порядка. На *Рис.* 12 показано, что подобная задача заканчивается на этапе, когда процесс состоит из отрезков прямой, эта ломанная линия демонстрирует, что шаг дискретизации недостаточно мал, чтобы рассчитывать такой короткий переходный процесс. На *Рис.* 13 видно, что если продолжить решение этой задачи с уменьшением шага дискретизации, процедура остановится на новом решении, что подтверждает некорректность предыдущего моделирования, но и это новое решение также некорректно. На *Рис.* 14 показано, что дальнейшая процедура с вновь уменьшенным шагом дает новый результат и так далее.

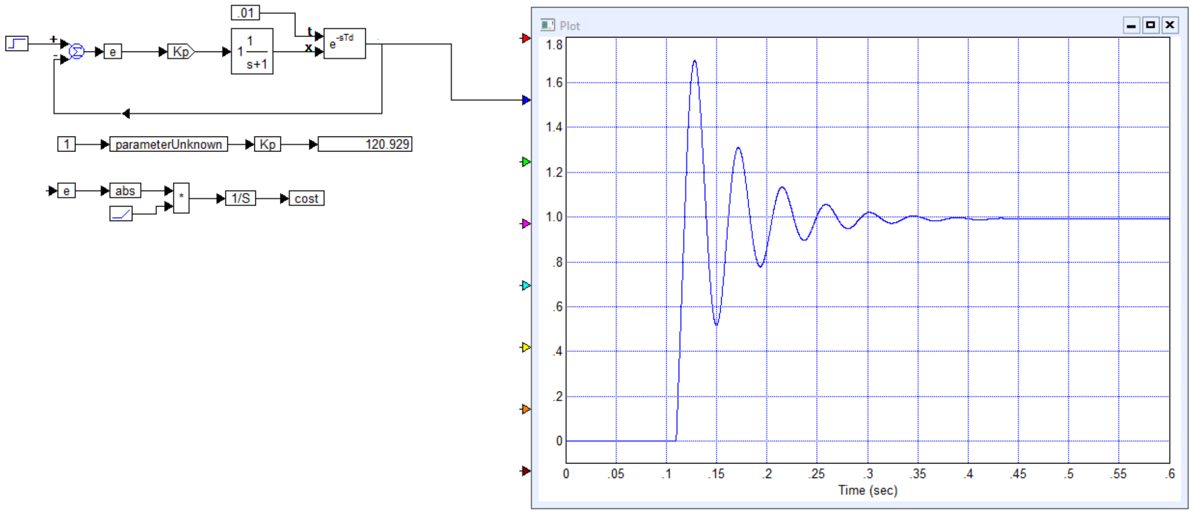

Рис. 11. При появлении в модели объекта звена запаздывания, решение задачи становится корректным, поскольку задача становится корректно поставленной

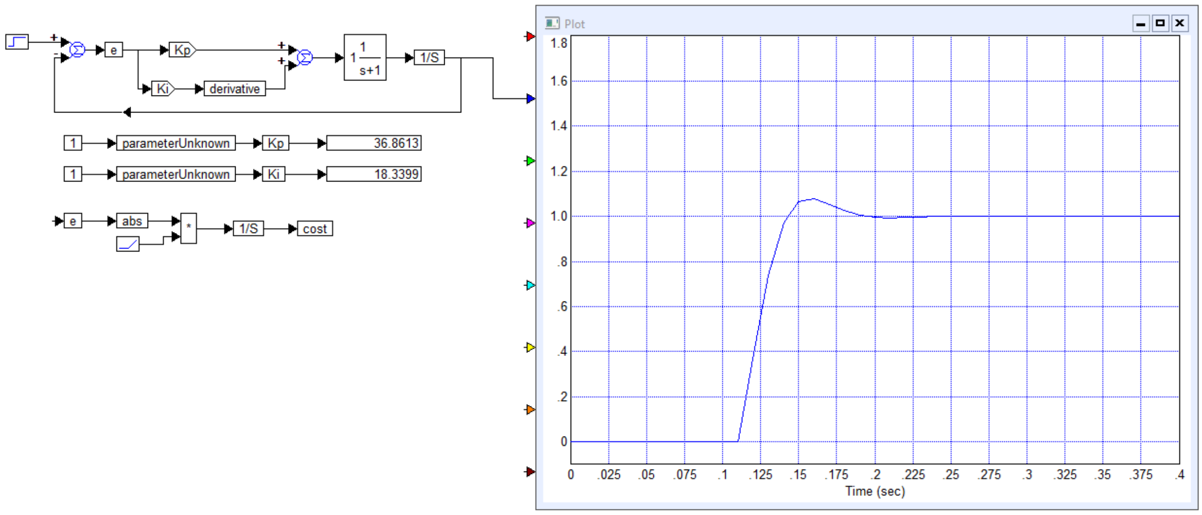

Рис. 12. Объект второго порядка и ПД-регулятор: задача некорректно поставлена, она оканчивается на каком-то этапе, переходный процесс состоит из ломанных линий

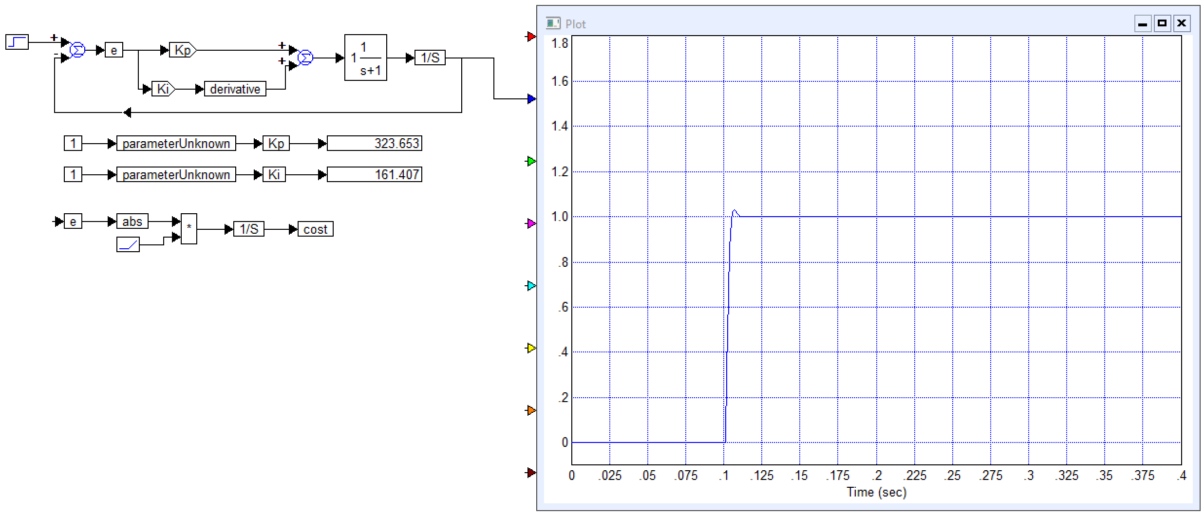

Рис. 13. После уменьшения шага интегрирования получаем другое решение, что демонстрирует, что предыдущее решение было некорректным

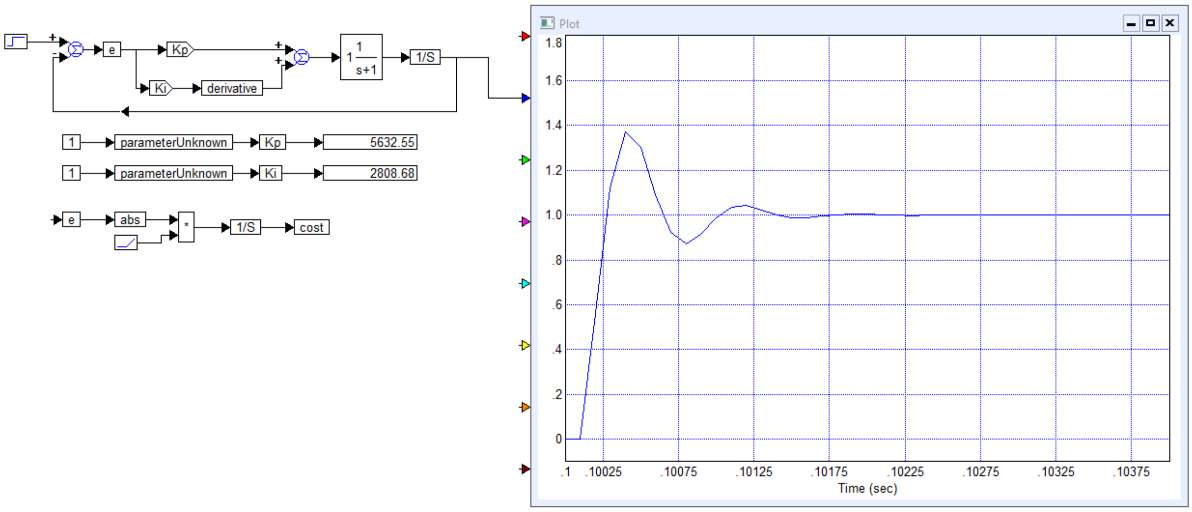

Рис. 14. После дальнейшего уменьшения шага интегрирования получаем новое и более привлекательное внешне решение, но оно также некорректно, что видно из того, что процесс состоит из ломаных линий; это моделирование можно продолжать бесконечно

Обсуждение и выводы

Перед решением задачи методом численной оптимизации для линейного объекта без запаздывания следует определить асимптотический порядок системы, который будет равен сумме этих показателей для моделей объекта и регулятора. Для каждой передаточной функции этот показатель определяется разностью степеней полинома в знаменателе и числителе. В частности, для фильтра первого порядка этот показатель равен единице, для ПИД-регулятора он равен минус единице, так как степень знаменателя выше степени числителя на единицу. Если асимптотический порядок контура равен нулю или единице, то оптимизация его формально невозможна, но задача может быть решена, если применять специальные методы оптимизации, либо использовать специальную стоимостную функцию. Если этот порядок равен двум или более, численная оптимизация возможна при любой обоснованной целевой функции.

Литература

[1] Zhmud V., Dimitrov L., Yadrishnikov O. Calculation of regulators for the problems of mechatronics by means of the numerical optimization method. 2014 12th International Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering APEIE 2014 Proceedings. 2014. С. 739-744.

[2] Жмудь В.А., Французова Г.А., Востриков А.С. Динамика мехатронных систем. Учебное пособие. Новосибирск, 2014.

[3] V. A. Zhmud, L. V. Dimitrov, J. Nosek. Numerical Optimization of Locked Automatic Control System in Software VisSim: New Structures and Methods: monograph. Novosibirsk: ЗАО «КАНТ». Россия, Новосибирск, ул. Путевая, д. 18., 2018. 251 р. https://www.researchgate.net/publication/325012120_Numerical_Optimization_of_Locked_Automatic_Control_System_in_Software_VisSim_New_Structures_and_Methods

[4] В. А. Жмудь. Автоматизированное проектирование систем управления.: учеб. пособие. Новосибирск, 2012: учеб.-метод. пособие. НГТУ, 2012. - 72 с.

[5] Жмудь В. А. Моделирование замкнутых систем автоматического управления: учеб. пособие для академического бакалавриата. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва: Юрайт, 2017. - 126 с. - ISBN 978-5-534-03410-3.

Вадим Жмудь - заведующий кафедрой Автоматики НГТУ, профессор, доктор технических наук.

E-mail: oao_nips@bk.ru

630073, Новосибирск, просп. К.Маркса, д. 20

Алексей Дмитриевич Рыбка - магистрант группы ААМ-19 кафедры Автоматики НГТУ.
E-mail: ra97@mail.ru

630073, Новосибирск, просп. К.Маркса, д. 20

Статья поступила 24.02.2020 г.

High-Frequency Asymptotics of a Linear ACS: The Ratio of the Orders of the Object and the Controller

V. Zhmud, A.D. Rybka

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. A rather complicated question of the theory of automatic control is the question of how an ideal linear system of a fixed order behaves with one or another controller in various situations, namely: in a pure theory when trying to find the ideal controller setting, in practice, in numerical simulation in steps, as well as in modeling with correction of the sampling step in the cycle. In all these cases, as it turns out, the system behaves differently, but this is not the basis for the assertion that the theory does not coincide with practice, or that practice is one thing, and modeling is another. If the practice does not coincide with the theory, then the theory is not accurate or incomplete. Since it would be erroneous to believe that the theory of automatic control is incomplete, it is necessary to point out those features of its application in which its predictions do not coincide with practice, to propose a technique in which its predictions would be carried out with high accuracy. This question is solved by considering the asymptotic behavior of linear systems in the high-frequency region. Understanding the features of this behavior and the different mechanism of the influence of these features in pure theory, when modeling step by step and in practice, allows us to formulate the necessary refinements to the object model during optimization, as well as to clarify the methodology for solving the linear control problem with these features in mind.

Key words. Control, optimization, regulator, controller, linear systems, asymptotic, polynomial

References

[1] Zhmud V., Dimitrov L., Yadrishnikov O. Calculation of regulators for the problems of mechatronics by means of the numerical optimization method. 2014 12th International Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering APEIE 2014 Proceedings. 2014. S. 739-744.

[2] Zhmud V.A., Frantsuzova G.A., Vostrikov A.S. Dinamika mekhatronnykh sistem. Uchebnoye posobiye. Novosibirsk, 2014.

[3] V. A. Zhmud, L. V. Dimitrov, J. Nosek. Numerical Optimization of Locked Automatic Control System in Software VisSim: New Structures and Methods: monograph. Novosibirsk: ZAO «KANT». Rossiya, Novosibirsk, ul. Putevaya, d. 18., 2018. 251 p. https://www.researchgate.net/publication/325012120_Numerical_Optimization_of_Locked_Automatic_Control_System_in_Software_VisSim_New_Structures_and_Methods

[4] V. A. Zhmud. Avtomatizirovannoye proyektirovaniye sistem upravleniya.: ucheb. posobiye. Novosibirsk, 2012: ucheb.-metod. posobiye. NGTU, 2012. - 72 s.

[5] Zhmud V. A. Modelirovaniye zamknutykh sistem avtomaticheskogo upravleniya: ucheb. posobiye dlya akademicheskogo bakalavriata. - 2-ye izd., ispr. i dop. - Moskva: Yurayt, 2017. - 126 s. - ISBN 978-5-534-03410-3.

Vadim Zhmud – Head of the Department of Automation in NSTU, Professor, Doctor of Technical Sciences.
E-mail: oao_nips@bk.ru

630073, Novosibirsk,
str. Prosp. K. Marksa, h. 20

Alexey Dmitrievich Rybka is a student of Automatics Department of NSTU.
E-mail: ra97@mail.ru

630073, Novosibirsk,
str. Prosp. K. Marksa, h. 20

The paper has been received on 24/02/2020.