

Моделирование геофизических полей локальными параболическими сплайнами

Х.Н.Зайнидинов, М.А. Кучкаров

Ташкентский университет информационных технологий

Аннотация. Работа посвящена моделированию сложных геофизических полей на основе локальной интерполяционной параболической сплайн-функции. Использование локальных интерполяционных сплайн-функций для построения математических моделей цифровой обработки и восстановления различных геофизических сигналов в настоящее время актуально при решении практических задач. Многомерный сплайн – это пример функции нескольких переменных, когда задана комбинация функций, каждая из которых зависит от одной независимой переменной. В качестве примера были взяты предварительные экспериментальные данные – двумерные геофизические сигналы (геофизическое поле). Построена математическая модель на основе локального интерполяционного кубического сплайна. Разработаны также алгоритм и программа моделирования двумерного поля в среде *MatLab* Результаты моделирования приведены в виде графиков.

Ключевые слова. Интерполяция, сплайн-функция, кубический сплайн, локальный сплайн, параболический сплайн, интерполяционный сплайн, дефект сплайна, многомерный сплайн, математическая модель, прогнозирование, предвестник, аномальные изменения, электромагнитные измерения, магнитное поле, акустические колебания, гравитационное поле, погрешность интерполяции

ВВЕДЕНИЕ

Во многих геофизических исследованиях усилия учёных направлены на поиски надёжных предвестников месторождений полезных ископаемых и сейсмической опасности. Предвестниками называются скачкообразные изменения, выбросы или аномалии в том или другом параметре, с помощью которых можно осуществить принцип прогнозирования – предсказание месторождения и количество полезных ископаемых, а также места, силы и времени будущего сейсмического события. Предвестниками могут служить аномальные изменения электромагнитного, гравитационного полей, аномальные возмущения в ионосфере, сейсмические шумы, различные акустические колебания и другие.

В последние годы предложены десятки новых методов прогнозирования полезных ископаемых и сейсмических событий. Результаты, полученные этими методами, совершенно необходимы и для понимания физических процессов, приводящих к сейсмическому событию и сопровождающих его, для построения физических и математических моделей взаимосвязи протекающих процессов, нужных для практического воплощения принципов прогнозирования.

Широкая популярность сплайн-методов в задачах анализа и обработки сейсмических и геофизических сигналов объясняется тем, что они служат универсальным инструментом приближения и по сравнению с другими математическими методами при равных с ними информационных и аппаратных затратах обеспечивают большую точность.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Использование локальных интерполяционных сплайн-функций для построения математических моделей в задачах цифровой обработки и восстановления различных геофизических сигналов остается актуальным.

Функция $S_n(f; x)$ называется n степенной функцией локальной интерполяции при условии соблюдения следующих условий:

1. $S_n(f; x) \in H_n[x_i, x_{i+1}]$,
2. $S_n(x) \in C^m[a, b]$,
3. $S_n(x_i) = f(x_i) \quad i=0, n$.

Дефектом интерполяционной сплайн-функции степени n называется число $\nu = n - m$. Двумерные локальные интерполяционные сплайн-функции могут быть построены на основе одномерных локальных кубических интерполяционных сплайн-функций и оценка погрешности тоже осуществляется на основе погрешностей локальных кубических интерполяционных сплайн-функций. Построение локального параболического сплайна заключается в следующем.

Чтобы построить область $D = [a, b] \times [c, d]$, разделим эти интервалы на N , равную оси OX , и M , равную оси OY , $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$.

$$\Delta_x: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$

$$\Delta_y: c = y_0 < y_1 < \dots < y_M = d.$$

где h и l выбраны следующим образом

$$h = x_{i+1} - x_i, i=0,1,\dots,N-1; l = y_{j+1} - y_j,$$

$j = 0, 1, \dots, M - 1$.

Рассмотрим сетку:

$$\Delta^* = \Delta_x^* \times \Delta_y^*$$

$$\Delta_x^*: x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1},$$

$$\Delta_y^*: y_{-1} < y_0 < y_1 < \dots < y_M < y_{M+1}.$$

Тогда мы имеем

$$D^* = [a - h, b + h] \times [c - l, d + l]$$

в узле Δ^* известны значения функции, то есть:

$$f(x_i, y_j) = f_{ij}, \quad i = -1, 0, 1, \dots, N, N + 1;$$

$$j = -1, 0, 1, \dots, M, M + 1.$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ

На основе выше приведенных значений будет построен параболический локальный интерполяционный сплайн, интерполирующий функции $f(x, y)$ в области D . Поскольку параболический сплайн, интерполирующий $f(x, y)$, является локальной, она строится на основе значений функции f_{ij} в диапазоне $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$:

$$\begin{aligned} & (x_{i-1}, y_{j-1}), (x_{i-1}, y_j), (x_{i-1}, y_{j+1}), (x_{i-1}, y_{j+2}), \\ & (x_i, y_{j-1}), (x_i, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_i, y_{j+2}), \\ & (x_{i+1}, y_{j-1}), (x_{i+1}, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+2}), \\ & (x_{i+2}, y_{j-1}), (x_{i+2}, y_j), (x_{i+2}, y_{j+1}), (x_{i+2}, y_{j+2}). \end{aligned}$$

Следует отметить, что сплайн, построенный для фиксированного значения одной из переменных, является одномерным кубическим локальным интерполяционным сплайном. Здесь переменная x фиксируется, то есть локальная интерполяционная кубическая функция $x = x_i$, имеет следующий вид $S_3(x_i, y)$:

$$S_3(x_i, y) = (1 - u)Z_j(x_i, y) + uZ_{j+1}(x_i, y), \quad (1)$$

где

$$Z_j(x_i, y) = -\frac{1}{2}u(1 - u)f_{i,j-1} + (1 - u^2)f_{ij} + \frac{1}{2}u(1 + u)f_{i,j+1}, \quad (2)$$

$$Z_{j+1}(x_i, y) = \frac{1}{2}(1 - u)(2 - u)f_{ij} + u(2 - u)f_{i,j+1} - \frac{1}{2}u(1 - u)f_{i,j+2} \quad (3)$$

Параболы $Z_j(x_i, j)$, $Z_{j+1}(x_i, j)$ следующие $(x_i, y_{j-1}), (x_i, y_j), (x_i, y_{j+1});$

$$(x_i, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_i, y_{j+2}),$$

$$u = \frac{y - y_j}{l}, \quad l = y_{j+1} - y_j.$$

параболы, которые проходят через узел. Подставляя (2) и (3) в (1), после некоторого упрощения получим следующее:

$$\begin{aligned} S_3(x_i, y) = & -\frac{1}{2}u(1 - u)^2f_{i,j-1} + \frac{1}{2}(1 - u)(2 + \\ & 2u - 3u^2)f_{ij} + \frac{1}{2}u(1 + 4u - \end{aligned}$$

$$3u^2)f_{i,j+1} - \frac{1}{2}u^2(1 - u)f_{i,j+2},$$

$$j = \overline{0, M - 1}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

На основании вышеизложенного

$$x = x_{i-1}; \quad x_{i+1}; \quad x_{i+2}.$$

В случае фиксированного мы получим следующие одномерные сплайн-функции:

$$S_3(x_{i-1}, y) = (1 - u)Z_j(x_{i-1}, y) + uZ_{j+1}(x_{i-1}, y), \quad (5)$$

$$S_3(x_{i+1}, y) = (1 - u)Z_j(x_{i+1}, y) + uZ_{j+1}(x_{i+1}, y), \quad (6)$$

$$S_3(x_{i+2}, y) = (1 - u)Z_j(x_{i+2}, y) + uZ_{j+1}(x_{i+2}, y), \quad (7)$$

$$S_3(x_{i-1}, y), S_3(x_i, y), S_3(x_{i+1}, y) \text{ и } S_3(x_{i+2}, y)$$

На основе полученных выше одномерных кубического сплайнов после некоторых преобразований можно построить двумерные интерполяционные сплайны следующего вида:

$$\begin{aligned} S_{3,3}(x, y) = & -\frac{1}{2}t(1 - t)^2S_3(x_{i-1}, y) + \frac{1}{2}(1 - \\ & - t)S_3(x_i, y) + \frac{1}{2}t(1 + 4t - 3t^2)S_3(x_{i+1}, y) - \\ & \frac{1}{2}t^2(1 - t)S_3(x_{i+2}, y), \end{aligned}$$

$$j = \overline{0, M - 1}, 0 \leq u \leq 1, t = \frac{x - x_i}{h}, u = \frac{y - y_j}{l}, h = x_{i+1} - x_i, l = y_{j+1} - y_j.$$

Подставляя значения одномерных кубических сплайнов, построенных выше $S_3(x_{i-1}, y)$, $S_3(x_i, y)$, $S_3(x_{i+1}, y)$ и $S_3(x_{i+2}, y)$ получим:

$$\begin{aligned} S_{3,3}(x, y) = & -\frac{1}{2}t(1 - t^2)[(1 - \\ & u)Z_j(x_{i-1}, y) + uZ_{j+1}(x_{i-1}, y)] + \frac{1}{2}(1 - \\ & t)(2 + 2t - 3t^2)[(1 - u)Z_j(x_i, y) + \\ & uZ_{j+1}(x_i, y)] + \frac{1}{2}t(1 + 4t - 3t^2)[(1 - \\ & u)Z_j(x_{i+1}, y) + uZ_{j+1}(x_{i+1}, y)] - \frac{1}{2}t^2(1 - \\ & t)[(1 - u)Z_j(x_{i+2}, y) + uZ_{j+1}(x_{i+2}, y)]. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{Где } i = \overline{0, N - 1}, j = \overline{0, M - 1}, 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq u \leq 1, \\ t = \frac{x - x_i}{h}, u = \frac{y - y_j}{l}, h = x_{i+1} - x_i, l = y_{j+1} - y_j.$$

после определенных упрощений получим следующую локальную интерполяционную сплайн-функцию:

$$\begin{aligned} S_{3,3}(x, y) = & \varphi_1(t)[\varphi_1(u)f_{i-1,j-1} + \\ & \varphi_2(u)f_{i-1,j} + \varphi_3(u)f_{i-1,j+1} + \\ & \varphi_4(u)f_{i-1,j+2}] + \varphi_2(t)[\varphi_1(u)f_{i,j-1} + \\ & \varphi_2(u)f_{i,j} + \varphi_3(u)f_{i,j+1} + \varphi_4(u)f_{i,j+2}] + \\ & \varphi_3(t)[\varphi_1(u)f_{i+1,j-1} + \varphi_2(u)f_{i+1,j} + \\ & \varphi_3(u)f_{i+1,j+1} + \varphi_4(u)f_{i+1,j+2}] + \\ & + \varphi_4(t)[\varphi_1(u)f_{i+2,j-1} + \varphi_2(u)f_{i+2,j} + \\ & \varphi_3(u)f_{i+2,j+1} + \varphi_4(u)f_{i+2,j+2}]. \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= -\frac{1}{2}t(1-t)^2, \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2}(1-t)(2+2t-3t^2), \\ \varphi_3(t) &= \frac{1}{2}t(1+4t-3t^2), \\ \varphi_4(t) &= -\frac{1}{2}t^2(1-t)\end{aligned}$$

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Разработана программа моделирования двумерного поля в среде *MatLab* реализующая (9), блок-схема программы приведена на *Рис. 1*.

В качестве конкретного примера рассмотрим (геофизическое поле) таблицу двумерных измерений приращений индукции электромагнитного поля по горизонтальным и вертикальным направлениям по отношению к условному нулевому уровню. Отсчёты взяты в процессе аэромагнитных измерений на площади 80x80 км через расстояния равные 1 км по каждой из горизонтальных координат x и y . Результаты интерполяции поля двумерными базисными сплайнами приведены (шаг 1x1) на *Рис. 2.*, а (шаг 0,01x0,01) на *Рис.3*.

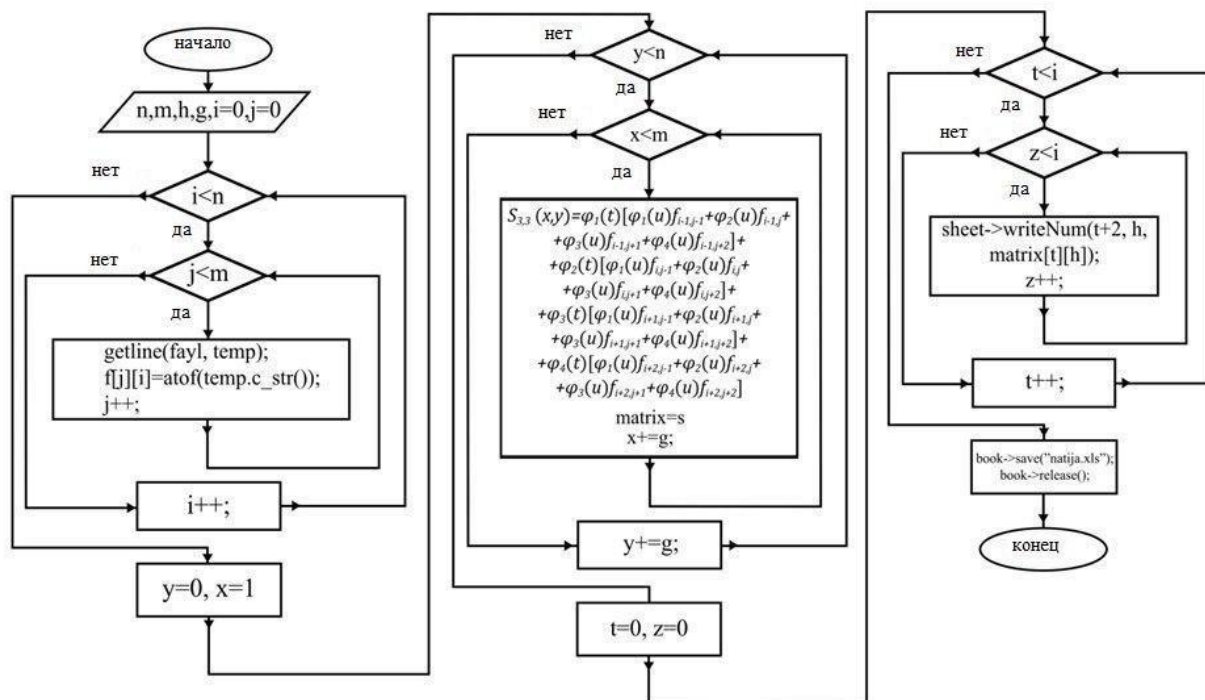


Рис. 1. Блок-схема программы моделирования двумерного геофизического поля локальными интерполяционными сплайн-функциями

Результаты моделирования двумерных геофизических полей показывают, что с помощью предложенных сплайн-функций могут быть смоделированы не только геофизические поля, но такие сложные многомерные сигналы как сейсмические, акустические и тепловые и другие. Также сплайны позволяют легко определить

скачкообразные изменения, выбросы или аномалии в том или другом параметре, с помощью которых можно осуществить принцип прогнозирования - предсказание месторождения и количество полезных ископаемых.

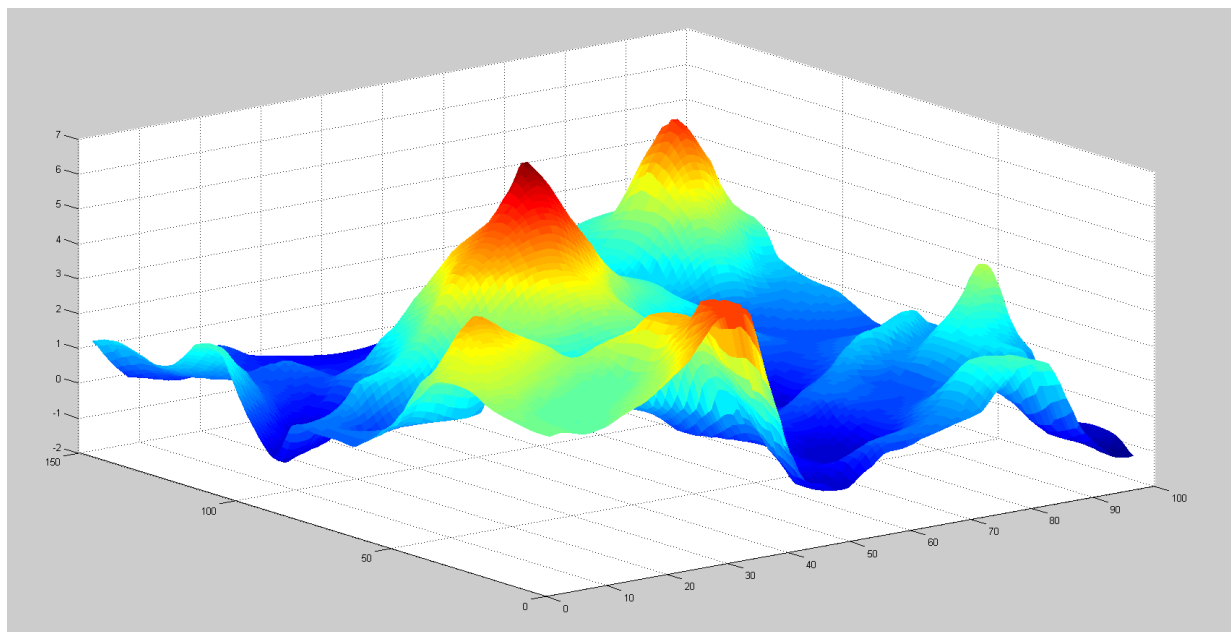


Рис. 2. Результаты моделирования геофизического поля. (Шаг 1х1)

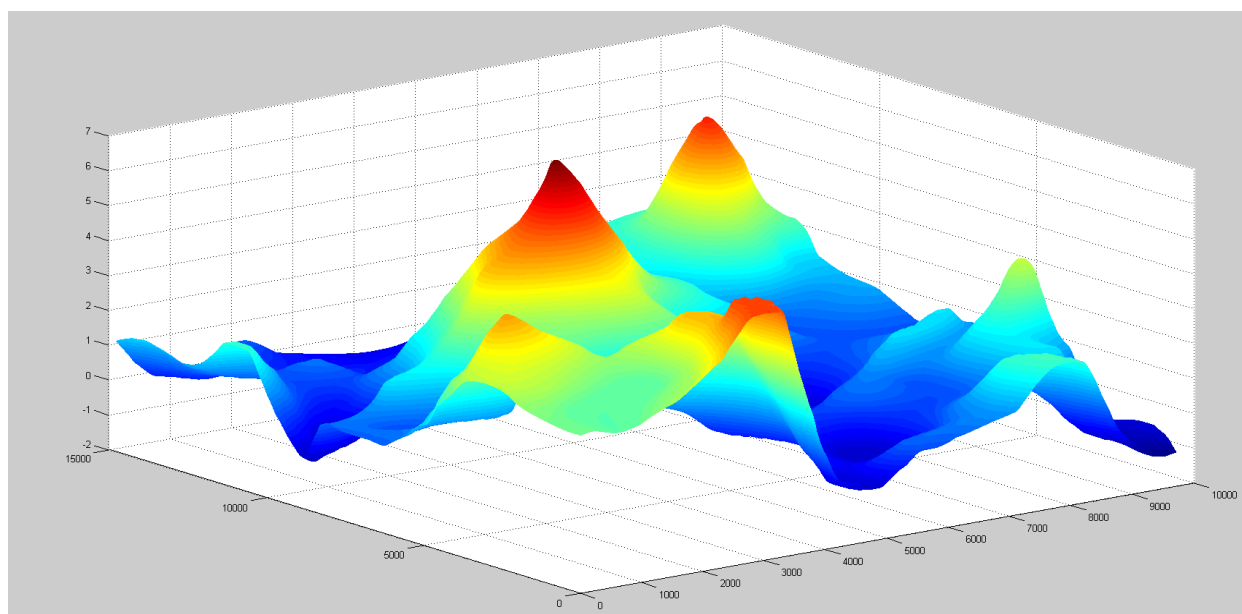


Рис. 3. Результаты моделирования геофизического поля. (Шаг 0,01х0,01)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, сплайны как класс кусочных функций вследствие ряда преимуществ перед другими методами интерполяции находят все более широкое применение при разработке алгоритмических и программных средств анализа и восстановления сигналов, расширяя рамки традиционных подходов к моделированию сложных полей.

Неоспоримы преимущества сплайнов в задачах вычисления функций многих переменных. С их помощью можно определить аномальные изменения электромагнитного, гравитационного полей,

аномальные возмущения в ионосфере, сейсмические шумы, различные акустические колебания и другие.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко И.Л. Методы сплайн - функций. - М.: Наука, 1980. 352 с.
- [2] Израилов М.И., Бахромов С.А. Об одном локальном интерполяционном кубическом сплайне и некоторые его приложения. Тезисы докладов III семинара - совещания Кубатурные формулы и их приложения. Уфа - Красноярск, 1995. С.17. (9-13 октябрь, 1995 г.)
- [3] Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. Изд. 2-е. СПб: Питер, 2006. 751 с.
- [4] Свиныин С.Ф., Зайнидинов Х.Н. Комплекс программ для исследования геофизических полей. Тезисы докл. Международной конференции «Региональная

- информатика». Санкт-Петербург, 22–24 июня, 2004. С.244.
- [5] Свинин С.Ф. Базисные сплайны в теории отсчётов сигналов.-Спб.: Наука, 2003. –118с.
- [6] Свинин С.Ф. Дискретизация на основе локальных сплайнов при измерениях сигналов конечной длительности. Метрология. –1998. №4. С.28–33.
- [7] Зайнидинов Х.Н., Бахрамов С.А., Кучкаров М.А. Методы моделирования тепловых полей бикубическими сплайнами. Автоматика и программная инженерия. 2018, №1(23) с. 96–103.
- [8] Зайнидинов Х.Н., Махмуджанов С.У., Тожибоев Г.О. Сплайн-вейвлеты и их применение в задачах восстановления сигналов. Автоматика и программная инженерия. 2019, №2 (28), С. 71–78.
- [9] Богданов В.В., Волков Ю.С. Условия формосохранения при интерполяции кубическими сплайнами. 2019. <https://www.researchgate.net/publication/333602092>.
- [10] Djananjay Singh, Madhusudan Singh, Hakimjon Zaynidinov. Signal Processing Applications Using Multidimensional Polynomial Splines. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology Series, Springer, Singapore. ISBN-978-981-13-2238-9. 2019.
- [11] Hakimjon Zaynidinov, Madhusudan Singh, Dhananjay Singh Polynomial Splines for Digital Signal and Systems (Монография на английском языке). LAMBERT Academic publishing, Germany, 2016. 208 p.
- [12] Zaynidinov H.N., Jovliev S. Modeling Specialized Processor Signal Processing Based on Haar Wavelet. Proceedings of International Conference on IT Promotion

in Asia 2011, September, 26–27, 2011, p. 314–318, Tashkent, Uzbekistan.



Хакимжон Насиридинович Зайнидинов - доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Информационных технологий Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми.
E-mail: tet2001@rambler.ru



Муслимжон Адхамжон угли Кучкаров докторант Информационных технологий Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми.
E-mail: muslimjon1010@gmail.com

Статья поступила 07.02.2020

Modeling of Geophysical Fields with Local Parabolic Splines

Kh.N. Zainidinov, M.A. Kuchkarov

Tashkent University of Information Technology

Abstract. The work is devoted to modeling complex geophysical fields based on a local interpolation parabolic spline function. The use of local interpolation spline functions to build mathematical models of digital processing and restoration of various geophysical signals is currently relevant for solving practical problems. A multidimensional spline is an example of a function of several variables when a combination of functions is given, each of which depends on one independent variable. As an example, preliminary experimental data were taken - two-dimensional geophysical signals (geophysical field). A mathematical model is constructed on the basis of a local interpolation cubic spline. An algorithm and a program for modeling a two-dimensional field in the MatLab environment are also developed. The simulation results are presented in graphs.

Key words. Interpolation, spline function, cubic spline, local spline, parabolic spline, interpolation spline, spline defect, multidimensional spline, mathematical model, forecasting, precursor, abnormal changes, electromagnetic measurements, magnetic field, acoustic vibrations, gravitational field, interpolation error

REFERENCES

- [1] Zav'yalov YU.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko I.L. Metody splayn - funktsiy. - M.: Nauka, 1980. 352 s.
- [2] Israilov M.I., Bakhromov S.A. Ob odnom lokal'nom interpolatsionnom kubicheskom splayne i nekotoryye yego prilozheniya. Tezisy dokladov III seminar - soveshchaniya Kubaturnyye formuly i ikh prilozheniya. Ufa - Krasnoyarsk, 1995. S.17. (9-13 oktyabr', 1995 g.)
- [3] Sergiyenko A. B. Tsifrovaya obrabotka signalov. Izd. 2-ye. Spb: Piter, 2006. 751 s.
- [4] Svin'in S.F., Zaynidinov KH.N. Kompleks programm dlya issledovaniya geofizicheskikh poley. Tezisy dokl. Mezhdunarodnoy konferentsii «Regional'naya informatika». Sankt-Peterburg, 22–24 iyunya, 2004. S.244.
- [5] Svin'in S.F. Bazyisnyye splayny v teorii otschotov signalov.- Spb.: Nauka, 2003. –118s.
- [6] Svin'in S.F. Diskretizatsiya na osnove lokal'nykh splaynov pri izmereniyakh signalov konechnoy dlitel'nosti. Mетрология. –1998. №4. S.28–33.
- [7] Zaynidinov KH.N., Bakhramov S.A., Kuchkarov M.A. Metody modelirovaniya teplovykh poley bikubicheskimi splaynami. Avtomatika i programmaya inzheneriya. 2018, №1(23) s. 96–103.
- [8] Zaynidinov KH.N., Makhmudzhonov S.U., Tozhiboyev G.O. Splayn-veyvlety i ikh primeneniye v zadachakh vosstanovleniya signalov. Avtomatika i programmaya inzheneriya. 2019, №2 (28), S. 71–78.
- [9] Bogdanov V.V., Volkov YU.S. Usloviya formosokhraneniya pri interpolatsii kubicheskimi splaynami. 2019. <https://www.researchgate.net/publication/333602092>.
- [10] Djananjay Singh, Madhusudan Singh, Hakimjon Zaynidinov. Signal Processing Applications Using Multidimensional Polynomial Splines. Springer Briefs in

Applied Sciences and Technology Series, Springer, Singapore. ISBN-978-981-13-2238-9. 2019.

- [11] Hakimjon Zaynidinov, Madhusudan Singh, Dhananjay Singh Polynomial Splines for Digital Signal and Systems (Monografiya na angliskom yazyke). LAMBERT Academic publishing, Germany, 2016. 208 p.
- [12] Zaynidinov H.N., Jovliev S. Modeling Specialized Processor Signal Processing Based on Haar Wavelet. Proceedings of International Conference on IT Promotion in Asia 2011, September, 26–27, 2011, p. 314–318, Tashkent, Uzbekistan.



Xakimjon Nasriddinovich Zaynidinov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Information Technology of the Tashkent University of Information Technologies named after



Muhammad al-Khorezmi.
E-mail: tet2001@rambler.ru

Muslimjon Adhamjon ugli Kuchkarov - doctoral student of Information Technologies of the Tashkent University of Information Technology named after Muhammad al-Khorezmi.
E-mail: muslimjon1010@gmail.com

The paper has been received on 07/02/2020