Алгоритмы и программы восстановления функций с помощью кубических базисных сплайнов

Х.Н. Зайнидинов[1], *Ж.Н. Нурмуродов*[1], *М.Р. Гофуржонов*[2]

[1]*Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми*
[2]*Томскоиий государственный национально-исследовательский университет*

*Аннотация***.** В статье рассматриваются вопросы применения систем базисных сплайнов для аппроксимации функций и экспериментальных зависимостей. Предложены алгоритмы для определения параметров сплайнов. Для систем, функционирующих в реальном масштабе времени следует использовать «точечные» формулы. Особенность этих формул заключается в независимости значения аппроксимирующего сплайна на данном участке от значений. Приведены также оценки погрешностей приближения кубическими базисными сплайнами и классическими кубическими полиномами Ньютона.

Ключевые слова: сплайн, базисный сплайн, аппроксимация, *b*-коэффициенты, семейства базисных сплайнов, «точечные» формулы, погрешность приближения, полиномы Ньютона, алгоритм, интерфейс, программный комплекс.

Введение

В настоящее время возрастающие требования к точности и производительности решения современных задач обработки и восстановления сигналов предопределяют переход к вычислительным супертехнологиям [1, 5].

Сигналы, поступающие от датчиков различных устройств в виде данных о состоянии и измерении температурных, радиационных, электромагнитных, гравитационных, тепловых и других физических полей часто являются многомерными и сложными [6, 7, 8, 10, 17].

В последние годы большое внимание специалистов привлекают те методы цифровой обработки сигналов, которые позволяют получить простые алгоритмы, требующие небольшой объем вычислений при приемлемых значениях точности.

Сплайн-функции – это развивающаяся область теории приближения функций и численного анализа. Получив распространение в 60-х годах, главным образом как средство интерполяции сложных кривых, сплайны в дальнейшем стали важным методом для решения разнообразных задач вычислительной математики и прикладной геометрии.

В технических приложениях наиболее употребительными являются сплайны невысокой степени, в частности параболические и кубические. Процесс построения таких сплайнов значительно проще, чем процесс построения сплайнов более высокой степени. Матрица системы уравнений, определяющей параметры сплайна, является трехдиагональной с доминирующей главной диагональю, и при решении системы можно использовать эффективные методы [1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14].

Любой сплайн достаточной гладкости может быть представлен через базисные сплайны. В частности, при d=1 для разложения используются так называемые “нормализованные” базисные сплайны степени m (B - сплайны). Они являются локальными (финитными), кусочно-полиномиальными функциями [2, 3, 8, 10, 11, 12, 15, 16].

1. Кубические базисные сплайны

Для обеспечения аппроксимации на всем интервале $[a, b]$ B-сплайны должны быть заданы на более широкой области посредством введения $2m$ дополнительных узлов $i=-m, m+1, \dots, n+m$, причем, все узлы могут быть расположены неравномерно.

Кубические B-сплайны задаются выражениями:

$$B_3(x) = \begin{cases} 0, \; x \ge 2, \\ (2 - x)^3/6, \; 1 \le x < 2, \\ 1/6(1 + 3(1 - x) + 3(1 - x)^2 - 3(1 - x)^3), \; 0 \le x < 1, \\ B_3(-x), \; x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

На *Рис*. 1 приведен один базисный сплайн, а на *Рис*. 2 семейства кубических базисных B-сплайнов, сдвинутых на постоянный шаг h = 1.

Для сплайнов 3-й степени локальные 3-точечная формула имеет следующий вид:

$b_i = (1/6)(-f_{i-1} + 8f_i - f_{i+1});$ (2)

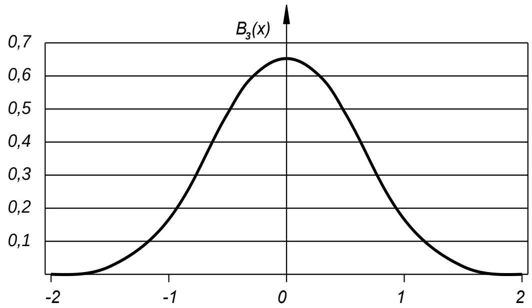

Рис. 1. Кубический базисный *B*-сплайн

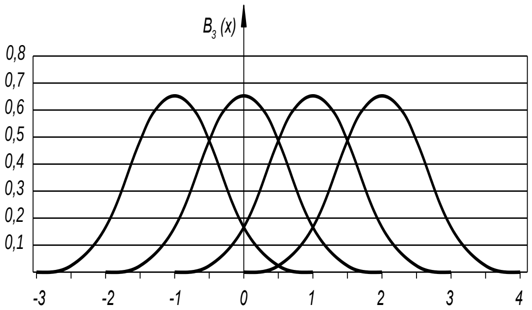

Рис. 2. Семейства кубических базисных сплайнов

Любой сплайн $S_m(x)$ степени m дефекта 1, интерполирующий заданную функцию $f(x)$ может быть единственным образом представлен *B* - сплайнами в виде суммы [2, 3, 9, 10]:

$$f(x) \cong S_m(x) = \sum_{i=-1}^{m} b_i B_i(x),\ a \le x \le b \quad (3)$$

где b_i - коэффициент, способен его определение приведен в формуле (2). Согласно формуле (3), значение интерполируемой функции в произвольной точке заданного интервала определяется значениями лишь m+1 слагаемых – парных произведений базисных функций на постоянные коэффициенты. Например, кубические *B*-сплайны требуют четырех базисных слагаемых.

Значение функции вычисляется по формуле:

$$f(x) \cong S_3(x) = b_{-1}B_{-1}(x) + b_0B_0(x) + b_1B_1(x) + b_2B_2(x) \ \text{ при } x \in [0,1] \quad (4)$$

Остальные базисные сплайны на этом подинтервале равны нулю и, следовательно, в образовании суммы не участвуют.

Следует отметить, что для вычисления *b*-коэффициентов существуют разные методы: интерполяционные и «точечные» формулы, сглаживающие сплайны, метод наименьших квадратов. Однако, для систем, функционирующих в реальном масштабе времени следует использовать «точечные» формулы. Особенность этих методов заключается в независимости значения аппроксимирующего сплайна на данном участке от значений.

Методическая погрешность интерполяции функции *f(x)* кубическими базисными сплайнами определяется неравенством:

$$\varepsilon \le \frac{5}{384} h^4 \max\left| f^{IV}(x) \right| . \quad (5)$$

Для функции, $f(x)=ln(1+x)$ получим:

$$\varepsilon \le \frac{5}{384 \cdot 1{,}0 \cdot 32^4} = 0{,}12 \cdot 10^{-7} \quad (6)$$

Для сравнения приведем значение погрешности интерполяции классическими кубическими полиномами Ньютона:

$$\varepsilon \le \frac{1}{24} h^4 \max\left| f^{IV}(x) \right| = \frac{1}{24 \cdot 32^4 \cdot 1{,}0} = 0{,}4 \cdot 10^{-7} \quad (7)$$

Как видно из (1.7), погрешность превышает величину, полученную в (6), более чем в три раза.

2. Алгоритмы вычисления параметров сплайна

В процедуре аппроксимации функций и одномерных сигналов выполняется восстановления одномерных сигналов с использованием кубических базисных сплайнов (базисный сплайн третьей степени). Степень базисного сплайна равно $N = 3$, исходя из этого, количество сплайнов в семействе равняется на $N+1=4$ (*B*-1, *B*0, *B*1, *B*2). Поэтому для аппроксимации одного значения используется четыре значения сплайна. Блок-схема алгоритма аппроксимации функций с помощью кубических базисных сплайнов приведена на *Рис*. 4.

Разработаны алгоритмы и комплекс программ для расчёта параметров базисного сплайна и для восстановления функций с помощью базисных сплайнов, коэффициенты вычислены с помощью трехточечной формуле. На *Рис*. 5 приведен интерфейс разработанного программного комплекса.

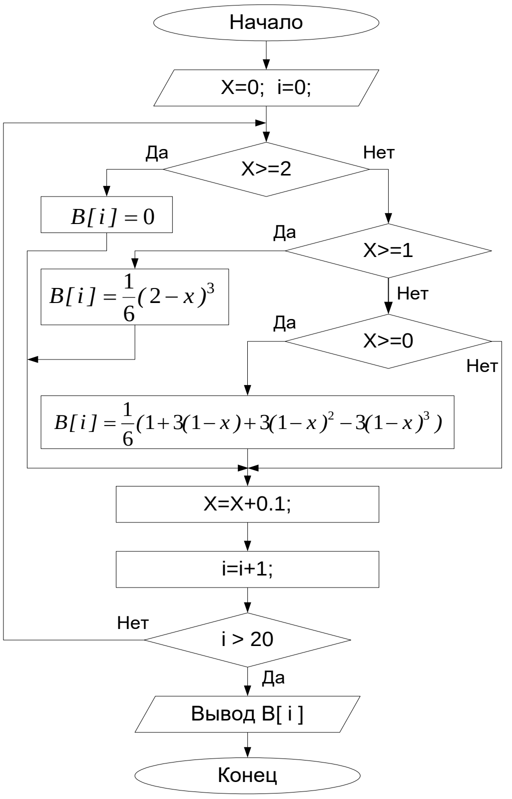

Рис. 3. Блок-схема алгоритма расчета кубического базисного сплайна

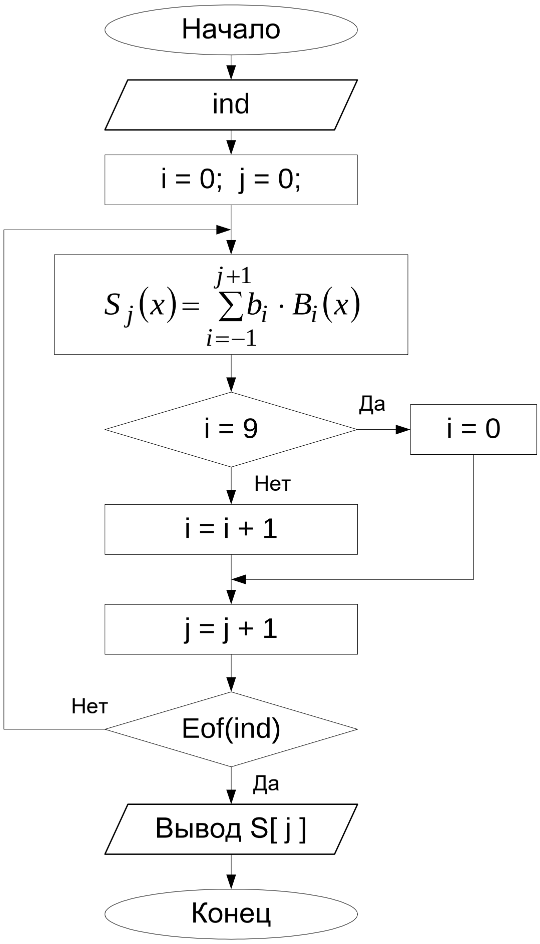

Рис. 4. Блок-схема алгоритма аппроксимации функций с помощью кубических базисных сплайнов

Рис. 5. Интерфейс разработанного программного комплекса

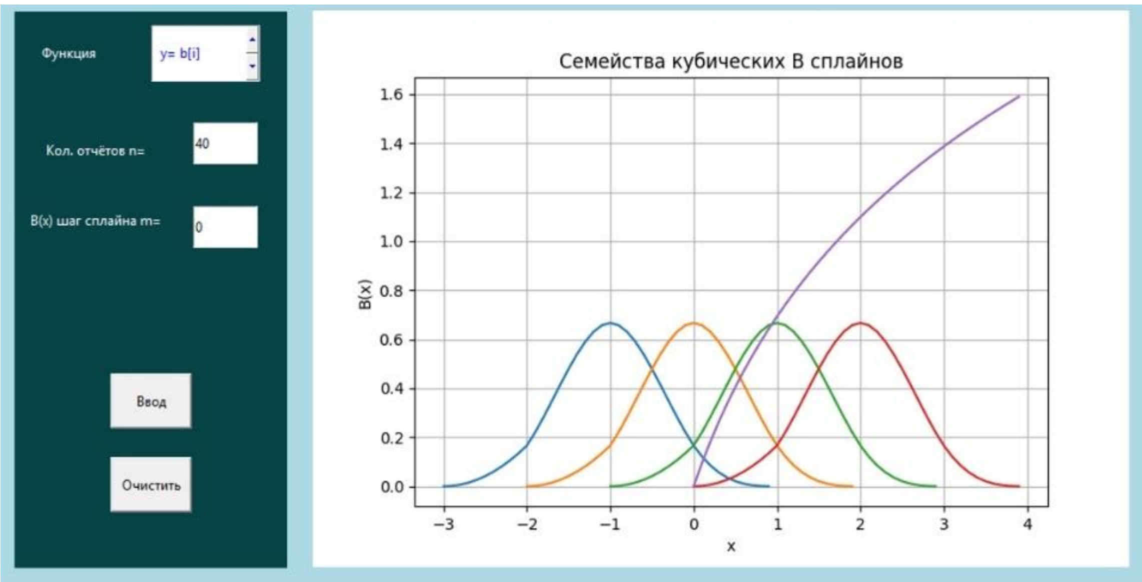

Рис. 6. Графики семейства базисных сплайнов и результаты аппроксимации

На *Рис*. 5, 6 приведены графики семейства базисных сплайнов и результаты аппроксимации аналитической функции $f(x)=ln(1+x)$ на интервале [0, 4].

Комплекс программ написан на языке *Python*.

Таким образом, применение кубических базисных сплайнов для аппроксимации функций и реальных экспериментальных данных позволяет получить простые алгоритмы для вычисления параметров сплайна, избегать решения систем уравнений, а по точности мало уступают другим математическим аппаратам.

Литература

[1] Агевич С.Н. Сплайн-Виленкина-Крестенсона функции в представлении сигналов. / Научное приборостроение. 2002, Т. 12, № 1, С.79-89.

[2] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко И.Л. Методы сплайн - функций. - М.: Наука, 1980. 352 с.

[3] Завьялов Ю.С. Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. - М.: Машиностр. 1985. - 224 с.

[4] Де Бор. Практическое руководство по сплайнам. - М.: Радио и связь, 1985. - 304 с.

[5] Жмудь В.А. Системы автоматического управления высшей точности. Автоматика и программная инженерия. 2016. № 3 (17). С. 128-136.

[6] H. N. Zaynidinov, I. Yusupov, J. U. Juraev, and Dhananjay Singh. Digital Processing of Blood Image by Applying Two-Dimensional Haar Wavelets // Intelligent Human Computer Interaction 12th International Conference, IHCI 2020 Daegu, South Korea, November 24–26, 2020 Proceedings, Part I, (Indexed by SCOPUS), p. 84-94, http://www.springer.com/series/7409

[7] Hakimjon Zaynidinov, Sarvar Makhmudjanov, Farkhad Rajabov, Dhananjay Singh. IoT-Enabled Mobile Device for Electrogastrography Signal Processing // Intelligent Human Computer Interaction 12th International Conference, IHCI 2020 Daegu, South Korea, November 24–26, 2020 Proceedings, Part II, (Indexed by SCOPUS), p. 346-356, http://www.springer.com/series/7409

[8] Dhananjay Singh, Madhusudan Singh, Hakimjon Zaynidinov "Signal Processing Applications Using Multidimensional Polynomial Splines", Springer Briefs in Applied Sciences and Technology Series, Springer, Singapore, (Indexed by SCOPUS and Springerlink) DOI: 10.1007/978-981-13-2239-6., 2019, 70 p.

[9] Х.Н. Зайнидинов, С.А. Бахрамов Теория сплайнов. // Монография –Т.: “Aloqachi”, 2020, - 188 стр.

[10] Свиньин С.Ф. Базисные сплайны в теории отсчётов сигналов. С-Пбг.: Наука, 2003. –118с.

[11] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. -М.: Наука, 1976. - 248 с.

[12] Cem Yuksel, Scott Schaefer, and John Keyser. Parameterization and applications of Catmull–Rom curves. *Computer-Aided Design*, 43(7):747–755, 2011. doi:10.1016/j.cad.2010.08.008.

[13] M.-L. Mazure. Finding all systems of weight functions associated with a given Extended Chebyshev space, J. Approx. Theory, 163 (2011), pp. 363–376.

[14] Babu GJ. Resampling methods for model fitting and model selection. J Biopharm Stat. 2011; 21:1177–86.

[15] Zhanlav, T. and Mijiddorj, R., “A comparative analysis of local cubic splines”, Comput. Appl. Math. 37 (2018) 5576–5586; doi:10.1007/s40314-018-0651-1.

[16] Zhanlav, T. and Mijiddorj, R., “Integro cubic splines on non-uniform grids and their properties”, East Asian J. Appl. Math. 11 (2021) 406–420; doi:10.4208/eajam.030920.251220.

[17] Zhmud V.A., Dimitrov L.V., Ivoilov A. Yu. Precision Frequency Synthesizer. Automatics & Software Engireery. 2018. № 1 (23). P. 20–32. http://www.jurnal.nips.ru/sites/default/files/AaSI-1-2018-2.pdf

Хакимжон Насиридинович Зайнидинов - доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Искусственный интеллект» Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми.
E-mail: tet2001@rambler.ru

Жавохир Нурмурод угли Нурмородов - ассистент кафедры «Искусственный интеллект» Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми.
E-mail: nurmurodovv1994@gmail.com

Мухаммадали Расулжон угли Гофуржонов – магистрант кафедры «Механика и математическое моделирование» Томского государственного национального исследовательского университета.
E-mail: gofurjonov13@mail.ru

Статья поступила 01.03.2022

Algorithms and Programs for Restoring Functions Using Cubic Basic Splines

H.N. Zainidinov[1], Zh.N. Nurmurodov[1], M.R. Gofurjonov[2]

[1]Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi
[2]Tomsk State National Research University

Abstract. The article deals with the application of systems of basic splines for the approximation of functions and experimental dependencies. Algorithms for determining the parameters of splines are proposed. For real-time systems, "point" formulas should be used. The peculiarity of these formulas lies in the independence of the value of the approximating spline in this section from the values. Estimates of approximation errors by cubic basic splines and classical Newton's cubic polynomials are also given.

Key words: spline, basic spline, approximation, b-coefficients, families of basic splines, "point" formulas, approximation error, Newton polynomials, algorithm, interface, software package.

References

[1] Agevich S.N. Splayn-Vilenkina-Krestensona funktsii v predstavlenii signalov. / Nauchnoye priborostroyeniye. 2002, T. 12, № 1, S.79-89.

[2] Zav'yalov YU.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko I.L. Metody splayn - funktsiy. - M.: Nauka, 1980. 352 s.

[3] Zav'yalov YU.S. Leus V.A., Skorospelov V.A. Splayny v inzhenernoy geometrii. - M.: Mashinostr. 1985. - 224 s.

[4] De Bor. Prakticheskoye rukovodstvo po splaynam. - M.: Radio i svyaz', 1985. - 304 s.

[5] Zhmud V.A. Sistemy avtomaticheskogo upravleniya vysshey tochnosti. Avtomatika i programmnaya inzheneriya. 2016. № 3 (17). S. 128- 136.

[6] H. N. Zaynidinov, I. Yusupov, J. U. Juraev, and Dhananjay Singh. Digital Processing of Blood Image by Applying Two-Dimensional Haar Wavelets // Intelligent Human Computer Interaction 12th International Conference, IHCI 2020 Daegu, South Korea, November 24–26, 2020 Proceedings, Part I, (Indexed by SCOPUS), p. 84-94, http://www.springer.com/series/7409

[7] Hakimjon Zaynidinov, Sarvar Makhmudjanov, Farkhad Rajabov, Dhananjay Singh. IoT-Enabled Mobile Device for Electrogastrography Signal Processing // Intelligent Human Computer Interaction 12th International Conference, IHCI 2020 Daegu, South Korea, November 24–26, 2020 Proceedings, Part II, (Indexed by SCOPUS), p. 346-356, http://www.springer.com/series/7409

[8] Dhananjay Singh, Madhusudan Singh, Hakimjon Zaynidinov "Signal Processing Applications Using Multidimensional Polynomial Splines", Springer Briefs in Applied Sciences and Technology Series, Springer, Singapore, (Indexed by SCOPUS and Springerlink) DOI: 10.1007/978-981-13-2239-6., 2019, 70 p.

[9] Kh.N. Zaynidinov, S.A. Bakhramov Teoriya splaynov. // Monografiya –T.: "Aloqachi", 2020, - 188 str.

[10] Svin'in S.F. Bazisnyye splayny v teorii otschotov signalov. S-Pbg.: Nauka, 2003. –118s.

[11] Stechkin S.B., Subbotin YU.N. Splayny v vychislitel'noy matematike. -M.: Nauka, 1976. – 248 s.

[12] Cem Yuksel, Scott Schaefer, and John Keyser. Parameterization and applications of Catmull–Rom curves. *Computer-Aided Design*, 43(7):747–755, 2011. doi:10.1016/j.cad.2010.08.008.

[13] M.-L. Mazure. Finding all systems of weight functions associated with a given Extended Chebyshev space, J. Approx. Theory, 163 (2011), pp. 363–376.

[14] Babu GJ. Resampling methods for model fitting and model selection. J Biopharm Stat. 2011; 21:1177–86.

[15] Zhanlav, T. and Mijiddorj, R., "A comparative analysis of local cubic splines", Comput. Appl. Math. 37 (2018) 5576–5586; doi:10.1007/s40314-018-0651-1.

[16] Zhanlav, T. and Mijiddorj, R., “Integro cubic splines on non-uniform grids and their properties”, East Asian J. Appl. Math. 11 (2021) 406–420; doi:10.4208/eajam.030920.251220.

[17] Zhmud V.A., Dimitrov L.V., Ivoilov A. Yu. Precision Frequency Synthesizer. Automatics & Software Engireery. 2018. № 1 (23). P. 20–32. http://www.jurnal.nips.ru/sites/default/files/AaSI-1-2018-2.pdf

Hakimjon Nasiridinovich Zaynidinov - Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Artificial Intelligence, Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi.
E-mail: tet2001@rambler.ru

Javohir Nurmurod o’g’li Nurmurodov - Assistant of the Department of Artificial Intelligence, Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi.
E-mail: nurmurodovv1994@gmail.com

Muhammadali Rasuljon o’g’li G’ofurjonov – master student of the department "Mechanics and Mathematical Modeling" of Tomsk State National Research University.
E-mail: gofurjonov13@mail.ru

The paper has been received on 01/03/2022