

Построение уравнения сложных фрактальных структур на основе метода R -функций (RFM)

Ш.А. Анарова, Ш.А. Садуллаева, З.Э. Иброхимова
Ташкентский университет информационных технологий

Аннотация. Рассматриваются методы построения уравнений объектов фрактальной геометрии. Приведены основные понятия теории фракталов, области применения фракталов, виды фракталов. Даны методы построения фракталов. Применяя, этих методов разработаны уравнения геометрии области разных фракталов. Разработаны фрактальные уравнения фрактальной геометрии области на основе метода R – функций (RFM). Используя уравнение прямой, уравнение окружности и конструктивные средства метода R -функций R_0 : R -конъюнкций и R -дизъюнкций построены различные разновидности фракталы, уравнения фракталов, состоящие из пересечений линий, касаний окружностей. На основе этих уравнений задавая число итераций n и угол наклона α сгенерированы различные предфракталы. Построены уравнения фрактальных антенн на основе «дерева Кейли», фрактальные кольцевые монополии, которые применяются в проектировании антенны. Эти фракталы очень красивые, которые могут быть использованы в создании компьютерных пейзажей, в различных иллюстрациях, телекоммуникации, текстильной промышленности, при рисовании узоров в керамических и фарфоровых изделиях, а также разработке узоров современного дизайна узбекских национальных ковров, тканей, костюмов и др.

Ключевые слова: фрактал, самоподобие, радиотехника, фрактальные антенны, L -системы, IFS , множество Кантора, метод R – функций (RFM), R -конъюнкций, R -дизъюнкций, предфрактал, «дерево Кейли».

ВВЕДЕНИЕ

Фрактальная геометрия возникла в XIX веке. Кантор с помощью простой повторяющейся процедуры превратил линию в набор несвязанных точек, при этом была получена так называемая пыль Кантора [1].

Слово «*fractal*» ввел Бенуа Р. Мандельброт от латинского слова «*fractus*», что означает разбитый, т.е. поделенный на части [1]. Одно из определений фрактала: фрактал – это геометрическая фигура, состоящая из частей, и которая может быть поделена на части, каждая из которых будет представлять уменьшенную копию целого. То есть фрактал – это такой объект, для которого не важно, с каким усилением его рассматривать в увеличительное стекло, но при всех его увеличениях структура остается одной и той же. Структуры, большие по масштабу, полностью повторяют структуры, меньшие по масштабу.

Одним из основных свойств фракталов является самоподобие. Размерность объекта показывает, по какому закону растет его внутренняя область. Аналогичным образом возрастает «объем» фрактала с ростом его размеров, но его размерность – величина не целая, а дробная. Поэтому граница фрактальной фигуры не линия: при большом увеличении становится видно, что она размыта и состоит из спиралей и завитков, повторяющих в малом масштабе саму фигуру.

В настоящее время фракталы нашли широкое применение в различных областях науки и техники: компьютерной графике, радиотехнике, телекоммуникации, в телевидении, физике и других естественных науках, текстильной и легкой промышленности, градостроительстве и архитектуре, медицине и др. [1-12].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

I. Применение фракталов. В компьютерной графике фракталы применяются для построения реалистичных изображений природных объектов, таких как поверхности морей, деревья, кусты, горные ландшафты и т.д. [1-5, 7]. Поэтому применять фрактальные изображения можно в самых разных сферах, начиная от создания обычных текстур и фоновых изображений и кончая фантастическими ландшафтами для компьютерных игр или книжных иллюстраций. А создаются подобные фрактальные шедевры (равно как и векторные) путем математических расчетов, но в отличие от векторной графики базовым элементом фрактальной графики является сама математическая формула – это означает, что никаких объектов в памяти компьютера не хранится, и изображение (как бы ни было оно замысловато) строится исключительно на основе уравнений.

В радиотехнике использование фрактальной геометрии при проектировании антенных устройств было впервые применено американским инженером Натаном Коэном, жившим в центре Бостона, где была запрещена установка внешних антенн на здания. Натан вырезал из алюминиевой фольги фигуру в форме кривой Коха, наклеил её на лист бумаги и затем присоединил к приёмнику. Оказалось, что такая антенна работает не хуже обычной. И хотя физические принципы работы такой антенны не изучены до сих пор, это не помешало Коэну основать собственную компанию и наладить их серийный выпуск.

Фрактальные антенны – относительно новый класс электрически малых антенн (ЭМА), принципиально отличающихся своей геометрией от известных решений. По сути,

традиционная эволюция антенн базировалась на евклидовой геометрии, оперирующей объектами целочисленной размерности (линия, круг, эллипс, параболоид и т. п.). Фрактальная антенна с удивительно компактным дизайном обеспечивает превосходную широкополосную производительность в маленьком форм-факторе. Достаточно компактные для установки или встраивания в различных местах фрактальные антенны используются для морских, воздушных транспортных средств или персональных устройств.

В телекоммуникации в сфере сетевых технологий было проведено множество исследований, представляющих самоподобие трафика, передаваемого по разного рода сетям. Особенно это касается речевых, аудио- и видеосервисов. Поэтому сейчас ведутся разработки и исследования возможности фрактального сжатия трафика, передаваемого по сетям, с целью более эффективной передачи информации.

Децентрализованные сети. Система назначения IP-адресов в сети *Netsukuku* использует принцип фрактального сжатия информации для компактного сохранения информации об узлах сети. Каждый узел сети *Netsukuku* хранит всего 4 Кб информации о состоянии соседних узлов, при этом любой новый узел подключается к общей сети без необходимости в центральном регулировании задачи IP-адресов, что, например, характерно для сети Интернет. Таким образом, принцип фрактального сжатия информации гарантирует полностью децентрализованную, а следовательно, максимально устойчивую работу всей сети.

Фракталы как элементы визуализации и спецэффектов. Фракталы притягивают и завораживают своей красотой и бесконечностью. Именно поэтому (но и не только) их очень часто используют для создания различного рода визуализаций, видеoinсталляций, спецэффектов в компьютерной графике и т. д.

Сегодня во многих играх (самый яркий пример – *Minecraft*), где присутствуют разного рода природные ландшафты, так или иначе, используются фрактальные алгоритмы. Этот способ довольно эффективно зарекомендовал себя. Дело в том, что настоящие природные объекты имеют в своей основе фрактальную структуру. Взяв это на вооружение, программисты предприняли попытку создать компьютерные ландшафты на основе фрактальных алгоритмов. Наблюдая сегодняшнее многообразие игр с красивыми природными ландшафтами, можно сделать вывод о том, что это им с успехом удалось. Более того, создано большое количество программ для генерации ландшафтов и пейзажей, основанных на фрактальных алгоритмах.

Применение фракталов в кино. По сути, в кино для создания различных фантастических пейзажей, как и в играх, используется тот же принцип. Действительно, зачем каждый раз создавать новое дерево или гору, тратя на это кучу времени, когда всё это можно во много раз быстрее сделать с помощью компьютерных программ, работающих на фрактальных алгоритмах.

Что касается фрактальной анимации, то фрактальные изображения, созданные в различных генераторах, необычайно красивы.

В физике и других естественных науках фракталы возникают при моделировании нелинейных процессов, таких как пламя, турбулентное течение жидкости, облака, сложные процессы диффузии-адсорбции и т. п. При моделировании пористых материалов (в нефтехимии) также используются фракталы. Фракталы применяются в биологии для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов (систем кровеносных сосудов) с помощью уравнений. Большой интерес вызывают задачи математического моделирования физико-механических полей в объектах фрактальной природы.

В последнее время растет популярность *фракталов у трейдеров*. Они используются для анализа состояния биржевых рынков. Фракталы рынка являются одним из индикаторов в торговой системе Била Вильямса. Считается, что он же впервые и ввел это название в трейдинг.

Таким образом, исследования, связанные с фракталами, меняют многое из привычных представлений об окружающем нас мире, о самых обычных предметах, таких как облака, реки, деревья, горы, травы и др. [1-12].

II. Виды фракталов. Большинство ученых и авторов выделяют основные большие группы фракталов: геометрические, алгебраические, динамические, стохастические и природные [1-12].

Геометрические фракталы: кривая Коха (снежинка Коха), кривая Леви, кривая Гильберта, ломаная (кривая) дракона (Фрактал Хартера-Хейтуэя), множество Кантора, треугольник Серпинского, ковёр Серпинского, Дерево Пифагора, Круговой фрактал, Стохастические фракталы, рукотворные фракталы, природные фракталы, детерминированные фракталы, недетерминированные фракталы.

Алгебраические фракталы: множество Манделброта, множество Жюлиа, бассейны (фракталы) Ньютона, биоморфы, треугольники Серпинского.

Динамические фракталы. Фракталы этого типа получают с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах (нелинейных динамических систем). Исходя из этого, название группы описывают сами

фракталы. Наукой в настоящее время наиболее изучены двухмерные процессы. Это самая крупная группа фракталов. Также названием они обязаны тем, что их строят на основе алгебраических формул как один из методов. Нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями - аттракторами. Состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций или некоторого количества изменений, зависит от ее начального состояния. Как следствие, - каждое устойчивое состояние будет обладать некоторой областью начальных состояний, из которых система попадет в конечные состояния.

Стохастические фракталы. Фракталы, при построении которых в итерационном процессе случайным образом изменяются какие-либо параметры. Типичный представитель данного класса фракталов «Плазма». Для ее построения возьмем прямоугольник и для каждого его угла определим цвет. Далее находим центральную точку прямоугольника и раскрашиваем ее в цвет равный среднему арифметическому цветов по углам прямоугольника плюс некоторое случайное число. Чем больше случайное число - тем более "рваным" будет рисунок. Если мы теперь скажем, что цвет точки - это высота над уровнем моря - получим вместо плазмы - горный массив. Именно на этом принципе моделируются горы в большинстве программ. С помощью алгоритма, похожего на плазму строится карта высот, к ней применяются различные фильтры, накладываем текстуру и пожалуйста фотореалистичные горы готовы. При построении таких фракталов случайным образом изменяют некоторые параметры, определяющие структуру фрактала. При этом можно получить объекты, очень похожие на природные, которые демонстрируют несимметричные деревья, изрезанность береговых линий, модели рельефов местности и поверхности морей. Двумерные стохастические фракталы очень часто используются для моделирования рельефа местности и поверхности моря.

Стохастические алгоритмы дают большее разнообразие форм благодаря элементам управляемой случайности. Фрактальное изображение получается неповторимым, что иногда является недостатком из-за невозможности заранее предвидеть результаты длительного расчета. Преобразуемые элементы в процессе фрактального построения могут перемещаться, вращаться, сжиматься, отражаться.

Природные фракталы. Природные фракталы – это такие объекты в природе, которые обладают фрактальными свойствами. Вот, к примеру в живой природе к таким фракталам относятся кровеносная система человека, легкие и строение глаза. А еще кроны и листья деревьев. Также сюда можно отнести морских

звезд, морских ежей, кораллы, морские раковины, некоторые растения, такие как капуста и брокколи. Если же рассматривать неживую природу, то там интересных примеров гораздо больше, нежели в живой. Молнии, снежинки, облака, всем известные, узоры на окнах в морозные дни, кристаллы, горные хребты – все это является примерами природных фракталов из неживой природы. Но самые, интересные фракталы – это природные.

Однако на сегодняшний день нет единого подхода по классификации фракталов. Например, А. А. Потапов, один из крупных специалистов в теории и практики фракталов, дает другие формы классификации фракталов [6, 9, 13]. Данная классификация одобрена самим Б. Мандельбротом, являющимся создателем общей концепции фракталов.

В бывшем Союзе исследования по теории фракталов и его практические применения в области радиофизики и радиотехники проводились в Институте радиотехники и электроники (ИРЭ) им. В.А. Котельникова Российской академии наук (РАН). Начиная с 80-х годов XX в. они привели к становлению и развитию нового фундаментального научного направления «Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника: Проектирование фрактальных радиосистем». В [9] отмечено, что фракталы, дробные операторы и скейлинг являются важным инструментом исследования, хорошо приспособленным и к запросам практики, и к абстрактным конструкциям современной математики.

Развитие новых методов исследования радиофизики и радиотехники и классификация текстурных и фрактальных методов обработки малоконтрастных изображений и слабых сигналов приведены в работе [9].

В ИРЭ им. Котельникова РАН проводились исследования по следующим задачам фрактальной радиофизики и фрактальной радиолокации:

- Текстурная и фрактальная обработка изображений и фрактальное обнаружение сверхслабых сигналов в интенсивных негауссовских помехах и шумах;
- Отказ от гауссовских статистик в экспериментах. Тонкая структура отраженных импульсных сигналов и новый класс признаков;
- Фрактальные сигнатуры и их применение в обработке сигналов;
- Основы методов построения фрактальных сигналов и фрактальные методы передачи информации;
- Фрактальная электродинамика и фрактальные «интеллектуальные» материалы;
- Скейлинг шероховатого слоя и фрактальные сигнатуры в задачах оценки микрорельефа обработанных поверхностей;

- Фрактальные импедансы и моделирование дробных операторов. Первый фрактальный конденсатор;

- Основные методы конструирования фрактальных импедансов и их перспективные области применения;

- Динамические фрактальные модели распространения и рассеяния волн случайно-неоднородными средами;

- Концепция фрактальных радиоэлементов и фрактальных радиосистем.

Таким образом, по теории фракталов и ее применению в радиофизике и радиотехнике ИРЭ им. Котельникова РАН стал главным научным центром.

В Узбекистане теорией фракталов и ее приложениями занимался академик Б. А. Бондаренко [14, 15]. Им исследованы классические и новые арифметические, геометрические и комбинаторные свойства арифметических треугольников и пирамид, обобщающих треугольник Паскаля. Изучены проблемы делимости и распределения элементов обобщенных треугольников и пирамид Паскаля по модулю p . На основе этого построены и исследованы плоские и пространственные классы фракталов и обобщенные арифметические графы, представляющих собой дискретные математические модели некоторых структур и процессов техники и естествознания. Им разработаны комбинаторные алгоритмы применения арифметических треугольников для построения не ортогональных полиномов и их использования для решения задач математической физики. Также им рассмотрены примеры по приложениям арифметических треугольников, их фракталов и графов к конкретным задачам.

Написанием уравнений объектов фрактальной геометрии занимался профессор Ш.А. Назиров и его ученики. Результаты этих исследований приведены в работах [16-24].

III. Методы построения фракталов.

В настоящее время существуют различные методы построения фракталов [1-15, 25, 33-34, 35-37].

III. 1. Метод L -системы [1-5, 7, 10-12, 33].

Понятие L -систем, тесно связанное с самоподобными фракталами, появилось только в 1968 г. благодаря Аристиду Линденмайеру. Изначально L -системы были введены при изучении формальных языков, а также использовались в биологических моделях селекции. С их помощью можно строить многие известные самоподобные фракталы, включая снежинку Коха и ковер Серпинского. Некоторые другие классические построения, например кривые Пеано (работы Пеано, Гильберта, Серпинского), также укладываются в эту схему. И, конечно, L -системы открывают путь к бесконечному разнообразию новых

фракталов, что и послужило причиной их широкого применения в компьютерной графике для построения фрактальных деревьев и растений. Наше изложение L -систем следует в основном по работам Прузинкевича и Ханаана [31] и ограничивается случаем детерминированных L -систем и графикой на плоскости.

Для графической реализации L -систем в качестве подсистемы вывода используется так называемая *терт*-графика (turtle - черепаха). При этом точка (черепашка) движется по экрану дискретными шагами, как правило, прочерчивая свой след, но при необходимости может перемещаться без рисования. В нашем распоряжении имеются три параметра (x , y , α), где x , y – координаты черепашки, α – ее направление. Черепашка обучена интерпретировать и выполнять последовательность команд, задаваемых кодовым словом, буквы которого читаются слева направо. Кодовое слово представляет собой результат работы L -системы и может включать следующие буквы:

F – переместиться вперед на один шаг, прорисовывая след;

b – переместиться вперед на один шаг, не прорисовывая след;

[– открыть ветвь (подробнее см. ниже);

] – закрыть ветвь (подробнее см. ниже);

+ – увеличить угол α на величину θ ;

- – уменьшить угол α на величину θ .

Размер шага и величина приращения по углу θ задаются заранее и остаются неизменными для всех перемещений черепашки. Если начальное направление движения α (угол, отсчитываемый от положительного направления оси X) не указано, то полагаем α равным нулю.

Несколько примеров иллюстрируют применение команд ветвления (обозначаются [),] и вспомогательных переменных (обозначаются X , Y и т.д.). Команды ветвления используются для построения деревьев и растений, а вспомогательные переменные заметно облегчают построение некоторых L -систем.

Формально детерминированная L -система состоит из алфавита, слова инициализации, называемого аксиомой или инициатором и набора порождающих правил, указывающих, как следует преобразовывать слово при переходе от уровня к уровню (от итерации к итерации). К примеру, можно заменять букву F при помощи порождающего правила $newf = F-F++F-F$, что соответствует L -системе для снежинки Коха, рассматриваемой ниже. Символы +, -, [,] не обновляются, а просто остаются на тех местах, где они встретились. Обновление буквы в данном слове предполагается одновременным, т.е. все буквы слова одного уровня обновляются раньше любой буквы следующего уровня.

L -система, соответствующая снежинке Коха (Рис. 4), задается следующим образом:

$$\theta = \pi/3.$$

Аксиома: $F++F++F$.

Порождающее правило: $newf = F-F++F-F$.

Графическое представление аксиомы $F++F++F$ – равносторонний треугольник. Черепашка делает один шаг вперед, затем угол α увеличивается на $2\pi/3$ и черепашка делает еще один шаг вперед, угол α снова увеличивается на $2\pi/3$ и черепашка делает еще шаг.

На первом шаге каждая буква F в словесно-инициаторе $F++F++F$ заменяется на $F-F++F-F$:

$$(F-F++F-F)++(F-F++F-F)++(F-F++F-F).$$

Убирая скобки, получаем:

$$F-F++F-F++F-F++F-F++F-F++F-F.$$

Повторяя этот процесс, на втором шаге получаем

$$\begin{aligned} &F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F- \\ &\quad F++F-F++ \\ &F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F- \\ &\quad F++F-F++ \\ &F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F- \\ &\quad F++F-F \end{aligned}$$

и т.д.

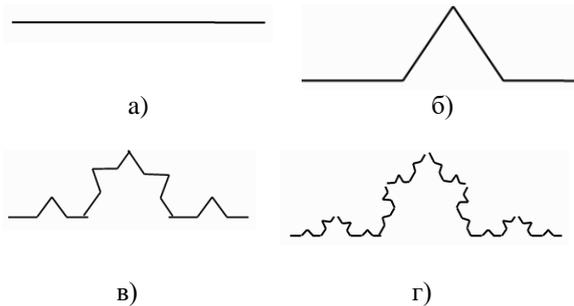


Рис. 1. Построение кривой Коха

В работе [33] приведены различные модификации метода L -системы, например L -система для кривых Пеано или «дракон Хартеры-Хайтвия», мозаики, «Остров», «Цепочки» (Ян-Си Ло). Кроме того, здесь же приведен вариант L -системы с добавленной операцией ветвления. В этой же работе приведены порождающие правила для L -систем: дракон Хартеры-Хайтвиея; ковер Серпинского; кривая Гильберта; кривая Гаспера; кривая Пеано; кривая Серпинского, заполняющая плоскость; кисть; мозаика; остров; снежинки; снежинки Коха; цветок; цепочка и др.

Ш. 2. Системы итерирующих функций (СИФ) [1-5, 7, 10-12, 34]. Система итерирующих функций (IFS – Iterated Function Systems) – это совокупность сжимающих аффинных преобразований. Как известно, аффинные преобразования включают в себя масштабирование, поворот и параллельный

перенос. Аффинное преобразование считается сжимающим, если коэффициент масштабирования меньше единицы.

Рассмотрим подробнее построение кривой Коха (см. рис.4) с использованием аффинных преобразований.

Каждый новый элемент кривой содержит четыре звена, полученных из образующего элемента с использованием масштабирования, поворота и переноса.

1. Для получения первого звена достаточно сжать исходный отрезок в три раза.

2. Следующее звено строится с использованием всех возможных преобразований, а именно: параллельный перенос на $1/3$ по оси OX , поворот на 60° (против часовой стрелки) и сжатие в три раза.

3. Третье звено строится аналогично второму: параллельный перенос на $2/3$ по оси OX , поворот на 60° (против часовой стрелки), сжатие в 3 раза по оси OY и сжатие в -3 раза по оси OX .

4. Последнее звено: параллельный перенос на $2/3$ по оси OX , сжатие в 3 раза.

Теперь можем найти систему итерирующих функций для описания кривой Коха. Осталось только произвести суперпозицию аффинных преобразований – масштабирование, поворот и параллельный перенос.

Из курса аналитической геометрии известны формулы вычисления новых координат x', y' при аффинных преобразованиях [31]:

$$\begin{aligned} x' &= x * a + y * b + e, \\ y' &= x * c + y * d + f. \end{aligned}$$

Если мы примем договорённость рассматривать только такие системы координат, у которых кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму происходит против часовой стрелки (будем называть такие системы правыми), то любое преобразование координат будет определяться формулами:

$$\begin{aligned} a &= \cos(\alpha) * \text{scale}_x, \\ b &= -\sin(\alpha) * \text{scale}_x, \\ c &= \sin(\alpha) * \text{scale}_y, \\ d &= \cos(\alpha) * \text{scale}_y, \\ e &= \text{move}_x, f = \text{move}_y, \end{aligned}$$

где scale_x - масштабирование по оси OX ; scale_y - масштабирование по оси OY ; α - угол поворота (против часовой стрелки); move_x - параллельный перенос по оси OX ; move_y - параллельный перенос по оси OY .

Полученные коэффициенты a, b, c, d, e, f для каждого звена и составят требуемую систему итерирующих функций.

Вычисляем коэффициенты аффинного преобразования IFS для кривой Коха.

1. Для первого звена коэффициенты аффинного преобразования следующие:

$$\begin{aligned} a &= 0.3333, b = 0.0000, c = 0.0000, \\ d &= 0.3333, e = 0.0000, f = 0.0000. \end{aligned}$$

2. Вычисляем коэффициенты преобразования для второго звена:

$$a = 0.1667, b = -0.2887, c = 0.2887,$$

$$d = 0.1667, e = 0.3333, f = 0.0000.$$

3. Коэффициенты для третьего звена:

$$a = -0.1667, b = 0.2887, c = 0.2887,$$

$$d = 0.1667, e = 0.6666, f = 0.0000.$$

4. И, наконец, коэффициенты преобразования для последнего звена:

$$a = 0.3333, b = 0.0000, c = 0.0000,$$

$$d = 0.3333, e = 0.6666, f = 0.0000.$$

Приводим матрицу вычисленных коэффициентов, задающих кривую Коха в формате IFS для программы Graphic:

A	B	C	D	E	F	P
0.3333	0	0	0.3333	0	0	0
0.1667	-0.2887	0.2887	0.1667	0.3333	0	0.25
-0.1667	0.2887	0.2887	0.1667	0.6667	0	0.25
0.3333	0	0	0.3333	0.6667	0	0.25

Расчет требует порядка 100 тысяч итераций. Вычисление первых шести параметров (A, B, C, D, E, F) было проведено выше. Значение последнего (седьмого) параметра (P) каждого преобразования пропорционально площади, занимаемой звеном. Сумма последних параметров для всех преобразований равна единице. В нашем примере размеры звеньев равны, поэтому седьмой параметр равен 0.25 для всех звеньев.

В том случае, если размеры оценить приблизительно не удастся, можно использовать формулу вычисления площади $p = abs(a * d - b * c)$ [4]. Следует учитывать, что эта формула дает не нормализованный результат. Поэтому нам придется еще приводить сумму к единице.

Проверяем формулу на нашем примере, используя коэффициенты, задающие кривую Коха в формате IFS:

$$1: 0.3333 * 0.3333 - 0.0000 * 0.0000 = 0.111,$$

$$2: 0.3333 * 0.3333 - 0.0000 * 0.0000 = 0.111,$$

$$3: 0.1667 * 0.1667 + 0.2887 * 0.2887 = 0.111,$$

$$4: -0.1667 * 0.1667 - 0.2887 * 0.2887 = 0.111.$$

Теперь подбором нормирующего множителя можно нормализовать значение седьмого параметра до значения 0.25.

СИФ можно реализовать различными методами [4, 16 - 24, 26 - 32]: детерминированным алгоритмом, рандомизированным алгоритмом. Кроме того, при рисовании объектов фрактальной геометрии можно использовать СИФ со сгущением, при помощи которого можно строить огромное количество разнообразных фрактальных конфигураций [4, 16-24, 26-32].

Если для построения фрактала используем систему итерирующих функций, получаем изображение, детализовка которого ограничена только разрешением устройства отображения, в отличие от построения, основанного на L -системе, где точность зависит от заданного порядка предфрактала. Чтобы получить высокое разрешение с использованием L -систем, необходимо задавать большой порядок предфрактала. Но так как построение основано

на рекурсивном алгоритме, соответственно, получается большая глубина рекурсии и, как следствие, замедление построения. На этом можно было бы и завершить описание IFS. Метод, основанный на IFS, в отличие от L -систем, считается перспективным методом синтеза фракталов, а также сжатия изображений.

III. 3. Метод теорий множеств [1-5, 7-8, 10-11]. Построение уравнение множества Кантора. Классическое множество Кантора (или пыль Кантора), хорошо известно из курса математического анализа как пример множества нулевой меры Лебега [4], чья мощность равна мощности континуума $[0,1]$. Фрактальные свойства пыли Кантора имеют огромное значение, особенно учитывая тот факт, что многие известные фракталы являются близкими родственниками этого множества.

Построение классической пыли Кантора начинается с выбрасывания средней трети (не включая концы) единичного отрезка. То есть исходное множество есть отрезок $[0,1]$, и первый шаг состоит в удалении открытого интервала $(1/3, 2/3)$. На следующем и всех остальных шагах выкидывается среднюю треть (не включая концы) всех отрезков текущего уровня. Таким образом, мы получаем последовательность множеств:

$$C_0 = [0, 1];$$

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1];$$

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1];$$

...

C_n

Предельное множество C , которое представляет собой пересечение множеств $C_n, n = 0, 1, 2, \dots$, называется классической пылью Кантора или просто канторовой пылью.

Множество Кантора размерности $d \approx 0,9542$. Рассмотрим пример самоподобного фрактала, являющегося множеством Кантора фрактальной размерности $d = \log(9)/\log(10) \approx 0,9542$ (в то время как размерность канторовой пыли $d \approx 0,6309$).

Обозначим через X множество всех вещественных чисел отрезка $[0,1]$, в десятичном представлении которых:

$$x = 0, x_1x_2x_3\dots$$

отсутствует какая-нибудь цифра, скажем, цифра 7.

К примеру, числа

$$0 = 0,0000\dots$$

$$1 = 0,9999\dots$$

$$1/4 = 0,2500\dots$$

принадлежат множеству X . Принадлежит X и число 0,7, так как мы можем записать его следующим образом:

$$0,7 = 0,6999\dots,$$

то есть не используя цифру 7.

При некотором размышлении становится ясно, как построить множество X . Пусть $X_0 = [0,1]$. Разделим X_0 на десять равных интервалов. Цифра x_1 указывает, какому из интервалов принадлежит x . Если $x_1 = 0$, то x попадает в первый интервал и т. д. Двусмысленность возникает только в том случае, когда x совпадает с концом какого-либо отрезка. Тогда имеется два возможных представления числа x : одно оканчивается всеми нулями, другое – всеми девятками. Но это не создает никаких проблем, так как мы договорились заранее, что ни одна цифра x_i не равна 7. Раз $x_1 \neq 7$, то x не попадает в восьмой интервал, то есть x не принадлежит интервалу $(0,7; 0,8)$. Выбросим этот интервал и обозначим оставшееся множество через X_1 . Разделим каждый из девяти оставшихся интервалов на десять равных частей. Так как $x_2 \neq 7$, то мы можем выбросить каждый восьмой из получившихся интервалов. Обозначим новое множество через X_2 . Повторяя описанную процедуру бесконечное число раз, получим последовательность вложенных множеств. Из построения следует, что X представляет собой объединение $N = 9$ уменьшенных в 10 раз ($r = 1/10$) копий самого себя. Таким образом, X – самоподобный фрактал, и его фрактальная размерность равна:

$$d = \log(9)/\log(10) \approx 0,9542.$$

Множество Кантора размерности $d = 1$. Переходя от прямой к плоскости, можно построить множество Кантора размерности $d = 1$. Следующий пример принадлежит Магди Мохаммеду. Пусть исходное множество – единичный квадрат на плоскости с вершинами в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ и $(0,1)$. На каждом шаге имеющиеся квадраты заменяются четырьмя меньшими, как показано на рис. 1. Предельное множество этого построения есть самоподобный фрактал с $N = 4$ и коэффициентом подобия $r = 1/4$. Следовательно, его размерность равна:

$$d = \log(4)/\log(4) = 1.$$

Из построения следует, что полученное множество есть множество Кантора, так как оно компактно, совершенно и вполне разрывно.

III. 4. Метод R-функций (RFM) построения уравнений фракталов. В задаче RFM [26–28] впервые были использованы построения уравнений ряда геометрических объектов.

Рассмотрим построение уравнений геометрии областей:

а. Фрактальные антенны на основе «дерева Кейли». Фрактальная антенна представляет собой ряд отрезков проводников разной длины. С каждой новой итерацией к антенне наращиваются отрезки определенной длины, так что для каждой нечетной итерации длина остается прежней, а с каждой четной итерацией – длина уменьшается в два раза (см. рис.2). В работе [9] исследованы распределения тока в

антенне «Дерево Кейли» 6-го порядка. В формировании параметров антенны начинают играть роль новые участки апертуры (см. рис. 2) [13].

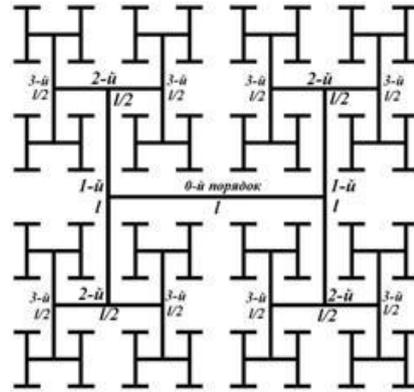


Рис. 2. «Дерево Кейли» 6-го порядка

Теперь построим уравнение «дерева Кейли» на базе метода R-функций.

Построим уравнение «дерева Кейли».

1-шаг.

$$i = 1; \quad a_1 = l/2; \quad b_1 = l/2;$$

$$f_{oe}(x, y) = \frac{a_{11}^2 - (x + a_1)^2}{2a_{11}} \geq 0$$

(a_{11} – маленькое число),

$$f_{op} = \frac{a_{11}^2 - (a_1 - x)^2}{2a_{11}} \geq 0,$$

$$\varphi_0(x, y) = \frac{b_1^2 - y^2}{2b_1} \geq 0;$$

$$f_1 = f_{oe}(x, y) \wedge \varphi_0(x, y) \geq 0,$$

$$f_2(x, y) = f_{op}(x, y) \wedge \varphi_0(x, y) \geq 0,$$

$$\omega_{01}(x, y) = f_1(x, y) \vee_0 f_2(x, y) \geq 0,$$

$$f_3(x, y) = \frac{a_1^2 - x^2}{2a_1} \geq 0, \quad f_4(x, y) = \frac{b_{11}^2 - y^2}{2b_{11}} \geq 0$$

(b_{11} -достаточно малое число*),

$$\omega_{02}(x, y) = f_3(x, y) \wedge_0 f_4(x, y) \geq 0,$$

$$f_{1ay}(x, y) = \frac{b_{11}^2 - (y + b_1)^2}{2b_{11}} \geq 0, \quad f_{1by}(x, y) = \frac{b_{11}^2 - (b - y)^2}{2b_{11}} \geq 0, \quad c = b_1/2,$$

$$\varphi_{1lx}(x, y) = \frac{c^2 - (x + a_1)^2}{2c} \geq 0, \quad \varphi_{1px}(x, y) = \frac{c^2 - (x - a_1)^2}{2c} \geq 0,$$

$$\omega_{03}(x, y) = (f_{1ay}(x, y) \wedge_0 \varphi_{1lx}(x, y)) \vee_0$$

$$\vee_0 (f_{1ay}(x, y) \wedge_0 \varphi_{1px}(x, y)) \vee_0$$

$$\vee_0 (f_{1by}(x, y) \wedge_0 \varphi_{1lx}(x, y)) \vee_0$$

$$\vee_0 (f_{1by}(x, y) \wedge_0 \varphi_{1px}(x, y)) \geq 0,$$

$$\omega_1(x, y) = \omega_{01}(x, y) \vee_0 \omega_{02}(x, y) \vee_0 \omega_{03}(x, y) \geq 0.$$

2-шаг.

$$i = 2; \quad a_i = a_1/2; \quad b_i = b_1/2;$$

$$\omega_2(x, y) = \omega_1(x - a_1, y - b_1) \vee_0 \omega_1(x + a_1, y - b_1) \vee_0$$

$$\vee_0 \omega_1(x + a_1, y + b_1) \vee_0 \omega_1(x - a_1, y + b_1) \vee_0 \omega_1(x, y) \geq 0.$$

Теперь строим итерационный процесс, и в результате получаем

$$i = k; \quad a_i = a_1/2; \quad b_i = b_1/2;$$

$$\omega_k(x, y) = \omega_{k-1}(x - a_1, y - b_1) \vee_0 \omega_{k-1}(x + a_1, y - b_1) \vee_0$$

$$\vee_0 \omega_{k-1}(x + a_1, y + b_1) \vee_0 \omega_{k-1}(x - a_1, y + b_1) \vee_0 \omega_{k-1}(x, y) \geq 0.$$

$k=3, 4, 5, \dots$

б. Фрактальные кольцевые монополии. Исследование фрактальных кольцевых структур, впервые предложенных авторами работы [9], проводилось средствами САПР Antsoft HFSS, благодаря удобному интерфейсу проектирования которой легко можно создать кольцевые структуры, учитывая свойства симметрии и подобия.

• В качестве базового элемента фрактальной антенной структуры первой итерации A1 было взято кольцо радиуса 11 мм, толщиной 0,4 мм по оси OX и 0,2 мм по радиусу. Алгоритм построения структуры фрактальной апертуры, представленной на рис.7, выглядит следующим образом.

Внутри базового элемента нулевой итерации размещены семь колец с радиусом в три раза меньше исходного элемента. Остальные параметры (ширина и толщина кольца базового элемента) оставлены без изменений. Центры шести маленьких окружностей расположены на расстоянии $R \cdot 2/3$ в вершинах шестиугольника. Центр седьмой окружности совпадает с центром основной антенны. Назовем это построение первым циклом итерации алгоритма построения, а антенну кратко обозначим аббревиатурой A1 [9].

• Для построения кольцевого монополия второй итерации A2 использовался тот же алгоритм [9], что и для модели A1 (см. рис.3).

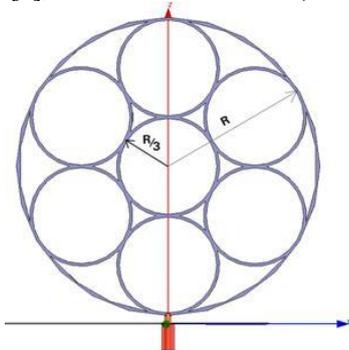


Рис. 3. Модель монополярной антенны A1

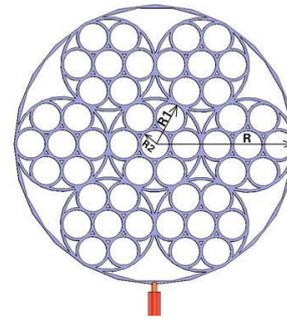


Рис. 4. Модель монополярной антенны A2

В радиус каждой окружности вставлено шесть окружностей втрое меньшего радиуса, центры которых расположены в вершинах шестиугольника на расстоянии $R \cdot 2/3$ от первоначального радиуса. Седьмая окружность расположена в центре базовой окружности. Таким образом, полученная модель предложенной фрактальной антенны выглядит, как на рис.7. Завиток антенны выполнен так же, как и в предыдущих случаях, коаксиальной линией диаметра 0,5 мм. Толщина антенны 0,4 мм, ширина колец 0,2 мм. Радиус внешней окружности $R = 11$ мм, $R_1 = R/3$, $R_2 = R/9$ (см. рис. 4).

Построим уравнение монополярной антенны A1:

$$\omega_0 = \frac{R_0^2 - x^2 - y^2}{2R} \wedge_0 \frac{x^2 + y^2 - (R - dr)^2}{2R} \geq 0,$$

$$r_1 = \frac{1}{3} R_0, \quad a_1 = \frac{2}{3} R_0, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{3} R_0, \quad dy = \frac{1}{3} R_0,$$

$$\omega_{10} = \omega_0(r_1, x, y), \quad \omega_{11} = \omega_0(r_1, x, y - a_1),$$

$$\omega_{12} = \omega_0(r_1, x, y + a_1),$$

$$\omega_{13} = \omega_0(r_1, x + dx, y - dy),$$

$$\omega_{14} = \omega_0(r_1, x + dx, y + dy),$$

$$\omega_{15} = \omega_0(r_1, x - dx, y + dy),$$

$$\omega_{16} = \omega_0(r_1, x - dx, y - dy),$$

$$\omega_1 = (\omega_{00} \vee_0 (\omega_{10} \vee_0 \omega_{11} \vee_0 \omega_{12} \vee_0 \omega_{13} \vee_0 \omega_{14} \vee_0 \omega_{15} \vee_0 \omega_{16})),$$

где dr – толщина окружности маленького числа.

Для получения монополярной антенны A2 и ее обобщения построим итерационный процесс:

$$r_i = \frac{1}{3} r_{i-1}, \quad a_i = \frac{2}{3} r_{i-1}, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{3} r_{i-1}, \quad dy = \frac{1}{3} r_{i-1},$$

$$\omega_{i0} = \omega_{i-1}(r_i, x, y), \quad \omega_{i1} = \omega_{i-1}(r_i, x, y - a_i),$$

$$\omega_{i2} = \omega_{i-1}(r_i, x, y + a_i),$$

$$\omega_{i3} = \omega_{i-1}(r_i, x + dx, y - dy),$$

$$\omega_{i4} = \omega_{i-1}(r_i, x + dx, y + dy),$$

$$\omega_{i5} = \omega_{i-1}(r_i, x - dx, y + dy),$$

$$\omega_{i6} = \omega_{i-1}(r_i, x - dx, y - dy),$$

$$\omega_i = (\omega_{00} \vee_0 (\omega_{i0} \vee_0 \omega_{i1} \vee_0 \omega_{i2} \vee_0 \omega_{i3} \vee_0 \omega_{i4} \vee_0 \omega_{i5} \vee_0 \omega_{i6})),$$

$i = 2, 3, 4, \dots$

III. 3. Кривая Серпинского [31]. Рассмотрим построение уравнений кривой Коха на базе RFM (см. рис. 1).

Выполним построение на интервале $-3a \leq x \leq 3a$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -y \geq 0; \quad \omega_{00} = \omega_0 \wedge_0 (f_1 \wedge_0 f_2) \geq 0; \\ f_1 &= \frac{1}{2}(x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}) \geq 0; \\ f_2 &= \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}) \geq 0. \end{aligned}$$

В данном случае ω_{00} есть уравнение равнобедренного треугольника. Если вместо ω_{00} записать уравнение вида

$$\omega_1 = \omega_0 \vee_0 (f_1 \wedge_0 f_2) \geq 0,$$

то получим уравнение, соответствующее графику на Рис. 1 б. Это и есть суть порождающего правила: $newf: = F-F++F-F$.

Итак,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \vee_0 (f_1 \wedge_0 f_2) \geq 0; \\ \omega_{21} &= \omega_1 (3(x+2a), 3y) \geq 0; \\ \omega_{22} &= \omega_1 \left(3 \left(\frac{x+a/2}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right), \\ &3 \left(-(x+a-2) \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{2} \right) \geq 0; \\ \omega_2 &= (\omega_{21}(x, y) \vee_0 \omega_{22}(x, y)) \wedge_0 \\ &\wedge_0 (\omega_{21}(-x, y) \vee_0 \omega_{22}(-x, y)) \geq 0, \\ \omega_{k1} &= \omega_{k-1} (3(x+2a), 3y) \geq 0; \\ \omega_{k2} &= \omega_{k-1} \left[3 \left(\frac{x+a/2}{2} + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right), \\ &3 \left(-(x+a/2) \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{2} \right) \geq 0; \\ \omega_k &= (\omega_{k1}(x, y) \vee_0 \omega_{k2}(x, y)) \wedge_0 \\ &\wedge_0 (\omega_{k1}(-x, y) \vee_0 \omega_{k2}(-x, y)) \geq 0, \end{aligned}$$

$k=3, 4, \dots$

Построим уравнение основания (рис.4):

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos(\alpha_1) + y \sin(\alpha_1), \quad y_1 = -x \sin(\alpha_1) + y \cos(\alpha_1), \\ x_2 &= x \cos(\alpha_2) + y \sin(\alpha_2), \quad y_2 = -x \sin(\alpha_2) + y \cos(\alpha_2), \\ f_1(x, y) &= (a^2 - x_1^2) \wedge_0 (a^2 - y_1^2) \geq 0, \\ f_2(x, y) &= (a^2 - x_2^2) \wedge_0 (a^2 - y_2^2) \geq 0, \\ f_3(x, y) &= f_2(-x, y), \\ \omega_1(x, y) &= f_1(x, y) \vee_0 f_2(x, y) \vee_0 f_3(x, y). \end{aligned}$$

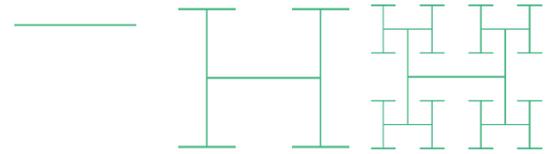
Здесь использованы формулы поворота осей, которые необходимы далее.

Строим итерационный процесс и в результате получаем:

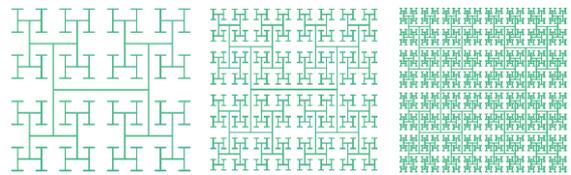
$$\begin{aligned} \omega_n(x, y) &= \omega_{n-1}(x-2a, y-2a) \vee_0 \omega_{n-1}(x+2a, y-2a) \vee_0 \\ &\vee_0 \omega_{n-1}(x+2a, y+2a) \vee_0 \omega_{n-1}(x-2a, y+2a) \vee_0 \omega_{n-1}(x, y) \geq 0. \\ n &= 2, 3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На основе разработанных уравнений некоторых фракталов на базе метода R-функций получена результатов в виде растровый графики. Результаты расчета при различных значениях k, n приведены на Рис. 5.

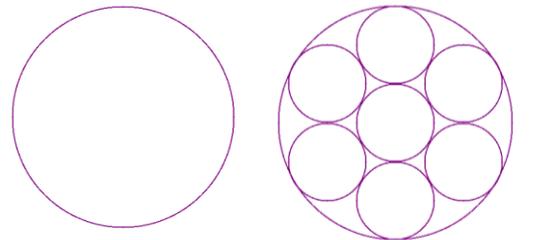


а) $k = 0$ б) $k = 1$ в) $k = 2$

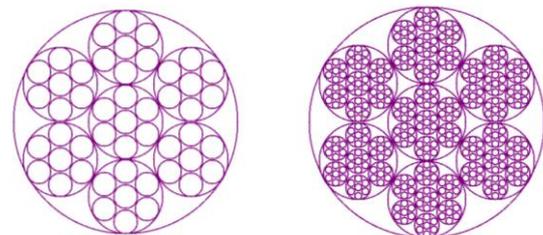


г) $k = 3$ д) $k = 4$ е) $k = 5$
Рис. 5. «Дерево Кейли»: в разных значениях k . k -число итерации

Отметим, что при $i = 2$ получаем уравнение антенны A2, результаты расчета $n = 0, 1, 2, 3$ приведены на рис. 6.



n=0 n=1



n=2 n=3

Рис. 6. Монопольной антенны A2 при разных значениях n . n -число итерации

В расчете использованы $a_1 = \frac{3}{8}a$, $b_1 = \frac{7}{4}a$.
 Результаты расчета при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ и различных значениях показаны на *Рис. 7*.

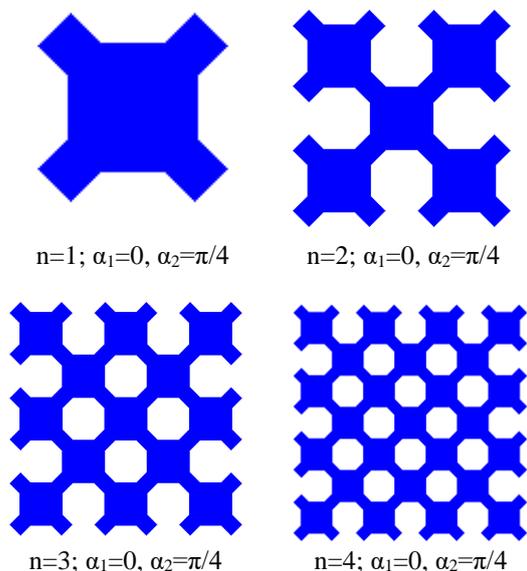


Рис. 7. Кривая Серпинского при различных значениях n и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/4$

Далее результаты расчета $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$ при различных значениях n приведены на *Рис. 8*.

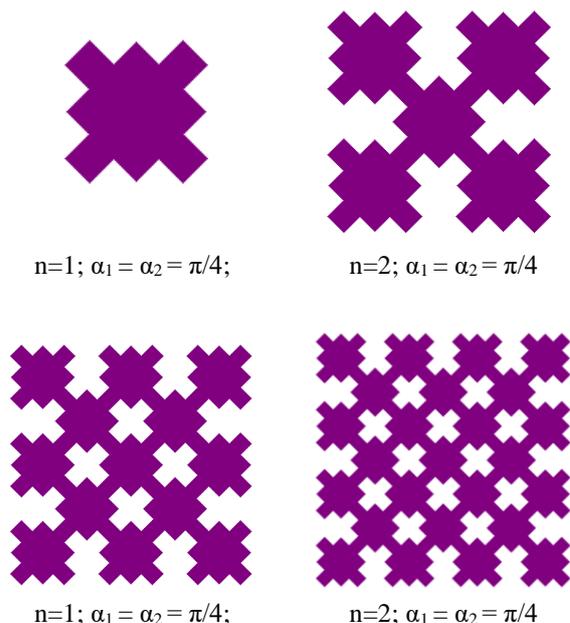


Рис. 8. Кривая Серпинского при различных значениях n ; $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$; n -число итерации

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнение фракталов и рекурсивные алгоритмы были разработаны с использованием методов L -системы, СИФ, теорий множеств и R -функции (RFM), на основе этого алгоритма используется программные средства для построения фракталов в $2D$.

На основе метода R -функции (RFM) в $2D$ была разработана автоматизированная технология описания границ сложных форм. Разработана технология геометрического моделирования сложных фрактальных структур с использованием возможности метода R -функций (RFM) для создания фрактальных дизайнов.

Эти фракталы очень красивые, которые могут быть использованы при проектировании антенн в радиотехнике, в создании компьютерных пейзажей, в различных иллюстрациях, телекоммуникациях, в текстильной и легкой промышленности, при рисовании узоров в керамических и фарфоровых изделиях в дизайне, а также разработке узоров современного дизайна узбекских национальных ковров и костюмов и др.

В данной статье построены уравнения лишь некоторых видов фракталов, что говорит о малоизученности данной проблемы с точки зрения аналитического описания уравнений фракталов.

В настоящее время существует множество видов фракталов. Для того чтобы построить их уравнение, следует провести серьезные научные исследования по построению уравнений фракталов на базе конструктивного метода R -функций В.Л. Рвачева.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
- [2] Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. М.: Мир, 1993.
- [3] Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. М.: Мир, 1991. – 254с
- [4] Ричард М. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: ПОСТМАРКЕТ, 2000. – 350 с.
- [5] Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 160 с
- [6] Потапов А.А. Теория фракталов: топология выборки. – М.: Университетская книга, 2005. – 868 с.
- [7] Перерва Л.М., Юдин В.В. Фрактальное моделирование. Учебное пособие. под общ. ред. В.Н. Гряника. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2007. – 186 с.
- [8] Edgar Gerald. Measure, Topology and Fractal Geometry. 2008 Springer Science+Business Media, LLC. – 293 p.
- [9] Потапов А.А. Фракталы, Скейлинг и дробные операторы в радиотехнике и электронике:

- Современное состояние и развитие. Журнал радиоэлектроники. М. 2010. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan10/4/text.html>
- [10] Балханов В.К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления. Отв. ред. Ю.Б. Башкуев. Улан-Удэ: Изд-во Бурятского государственного университета, 2013. – 224 с.
- [11] Falconer Kenneth. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. 2014 John Wiley & Sons, Ltd. – 400 p.
- [12] Nazirov Sh., Anarova Sh.A., Nuraliev F.M. Fraktallar nazariyasi asoslari. Toshkent-2017, «Navruz» nashriyoti, 128 b.
- [13] Потапов А.А. Фракталы и дробные операторы как основа новых технологий обработки информации и синтеза фрактальных радиосистем. Сб. научно-практической конф. «Ориентированные фундаментальные исследования – от современной науки к технике будущего» в рамках 10-й юбилейной специализированной выставки с международным участием «Изделия и технологии двойного назначения. Диверсификация ОПК» (Россия, Москва, ВВЦ, пав. № 69, 10-13 ноября 2009 г.). Под ред. член-кор. РАН Б.В. Гусева. М.: Эксподизайн-Холдинг, 2009. С 5.
- [14] Бондаренко Б.А. Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фракталы, графы и приложения. – Ташкент: Фан, 1990. – 192 с.
- [15] Bondarenko V.A. Generalized Pascal Triangles and Pyramids, their Fractals, Graphs, and Applications – USA, Santa Clara: Fibonacci Associations, The Third Edition. 2010. 296 p.
- [16] Назиров Ш.А., Эржанов М.О. Алгебрологический метод построения объектов фрактальной геометрии. Вестник ТУИТ. Ташкент, 2014. №1. -С. 21-31.
- [17] Назиров Ш.А., Эржанов М.О. Применение метода R -функций в фрактальной геометрии. Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб.науч.тр. Ташкент, ЦРППиАПК при ТУИТ, 2012. Вып. 127. С. 51-61.
- [18] Назиров Ш.А., Эржанов М.О., Ташмухамедова Г.Х., Туйчиев Б.О. Методы построения уравнений объектов фрактальной геометрии. Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып 130. Ташкент, 2014. -С. 5-21.
- [19] Назиров Ш.А., Эржанов М.О. Построение уравнение детерминированных фракталов. Узб. журнал Проблемы информатики и энергетики. Ташкент, 2014. №1-2. С. 57-65.
- [20] Анарова Ш.А., Тешабаев Т.З., Нуралиев Ф.М., Абдикаримов С.С. Построение уравнений квадрата спиралеобразных фракталов. Muhammad al-Xorazmiy avlodlari ilmiy-amaliy va axborot tahliliy jurnal. Ташкент – 2019. № 1(7). С. 121-124
- [21] Anarova Sh.A., Nuraliev F.M., Narzullov O.M. Construction of the equation of fractals structure based on the rvachev r -functions theories. Mechanical Science and Technology Update, IOP Publishing, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1260 (2019) 102002.
- [22] Nuraliev F.M., Anarova Sh.A., Narzullov O.M. Mathematical and software of fractal structures from combinatorial numbers. International Conference on Information Science and Communications Technologies ICISCT 2019 Applications, Trends and Opportunities 4th, 5th and 6th of November 2019, Tashkent University of Information Technologies TUIT, Tashkent, Uzbekistan.
- [23] Anarova Sh.A., Narzullov O.M., Ibrohimova Z.E. Fraktal naqshlarni o'zbek milliy gilamlari va jakkard gazlamalarida qo'llash. Muhammad al-Xorazmiy avlodlari ilmiy-amaliy va axborot tahliliy jurnal. Ташкент – 2020. № 1(13). С. 132-137
- [24] Anarova Sh.A., Narzullov O.M., Ibragimova Z.E. Development of Fractal Equations of National Design Patterns based on the Method of R -Function. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE) ISSN: 2278-3075, Volume-9 Issue-4, February 2020. P. 134-147.
- [25] Рвачев В.Л. Метод-функция и ее некоторые применения. Киев: Наукова Думка, 1982. 552 с.
- [26] Кравченко В.Ф. Басараб М.А. Решение краевых задач электродинамики в областях фрактальной геометрии методом R -функций построения. ЖТФ. Москва, 2003. Т. 29, вып. 24. С. 89-94.
- [27] Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и ветвления в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.-416с.
- [28] Максименко-Шейко К.В. R -функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украина, 2009. -30 с.
- [29] Максименко Шейко-К.В., Толоч А.В., Шейко Т.И. R -функции как аппарат в приложениях фрактальной геометрии. Прикладная информатика. 2010, №6 (30). С. 20-27.
- [30] Максименко Шейко-К.В., Шейко Т.И. R -функции в математическом моделирование геометрических объектов в 3Д по информации в 2Д. Вестник Запорожский национальный университет. 2010, №1. С. 98-104.
- [31] Максименко-Шейко К.В., Толоч А.В., Шейко Т.И. R -функции в фрактальной геометрии. Информационные технологии. М.: Издательство "Новые технологии", 2011. № 7. С.24-27.
- [32] Максименко Шейко-К.В., Шейко Т.И. Математические моделирование геометрических фракталов с помощью R -функций. Кибернетика и системный анализ. 2012, №4. С. 155-162.
- [33] Кальмиков А.В., Кальмиков Л.В., Кешелова А.В. Несколько новых биоподобных L -систем. МКО-10, 2002, -С.50-63.
- [34] Xiamoni Qi. Fixed Points Fractals, Iterated function systems and Generalized support vector Machines. 2016. – 26 p.
- [35] Singh, D., Singh, M., & Hakimjon, Z. (2019). Geophysical application for splines. In SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology (pp. 55–63). Springer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-981-13-2239-6_7
- [36] Х.Н. Зайнидинов, Б.Р. Азимов Построение кубического сплайна для сигналов измеренных в неравных интервалах. Автоматика и программная инженерия. 2020, №1 (31), г. Новосибирск, Россия, С. 70-76.
- [37] Х.Н. Зайнидинов, Ж.У. Жураев, М.Г. Маннапова Интерполяция функций с помощью кусочно-постоянных и кусочно-линейных ветвлений Хаара. Автоматика и программная инженерия. 2020, №1 (31), г. Новосибирск, Россия, С. 42-48.



Шахзода Аманбаевна Анарова - доктор технических наук, профессор кафедры аудиовизуальных технологий Ташкентского университета информационных технологий.
E-mail: shahzodaanarova@gmail.com



Шахло Азимбаевна Садуллаева - первый проректор по учебной работе Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, доктор технических наук, профессор кафедры мультимедийных технологий.
E-mail: sh.sadullaeva@tuit.uz



Зулайхо Эргаш кизи Иброхимова - Ассистент, Самаркандского филиала Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий.
E-mail: zulayhoibrokhimova90@gmail.com

Статья получена 03.07.2020

Equation of Complex Fractal Structures Based on the R-Function Method (RFM)

Sh.A. Anarova, Sh.A. Sadullaeva, Z.E. Ibrokhimova
Tashkent University of Information Technologies

Abstract. Methods for constructing equations for objects of fractal geometry are considered. The basic concepts of the theory of fractals, areas of application of fractals, types of fractals are presented. Methods for constructing fractals are given. Using these methods, the equations of the geometry of the region of different fractals are developed. The fractal equations of the fractal geometry of the region are developed on the basis of the R - functions method (RFM). Using the equation of the straight line, the equation of the circle and the constructive means of the method of R-functions R0: R-conjunctions and R-disjunctions, various different fractals, fractal equations consisting of line intersections, tangencies of circles are constructed. Based on these equations, setting the number of iterations n and the slope \square , various prefractals are generated. Equations of fractal antennas based on "Keiley tree", fractal ring monopoles, which are used in antenna design, are constructed. These fractals are very beautiful, which can be used in the creation of computer landscapes, in various illustrations, in telecommunications, in the textile industry, in drawing patterns in ceramic and porcelain products, as well as in the development of modern design patterns for Uzbek national carpets, fabrics, costumes, etc.

Key words: fractal, self-similarity, radio engineering, fractal antennas, L-systems, IFS, Cantor set, R-function method (RFM), R-conjunctions, R-disjunctions, pre-fractal, Keiley tree.

REFERENCES

- [1] Mandel'brot B. Fraktal'naya geometriya prirody: Per. s angl. M.: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2002. – 656 s.
- [2] Paytgen KH.–O., Rikhter P.KH. Krasota fraktalov. M.: Mir, 1993.
- [3] Feder Ye. Fraktaly. Per. s angl. M.: Mir, 1991. – 254s
- [4] Richard M. Kronover. Fraktaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh. Osnovy teorii. M.: POSTMARKET, 2000. – 350 s.
- [5] Morozov A.D. Vvedeniye v teoriyu fraktalov. Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2004. – 160 s
- [6] Potapov A.A. Teoriya fraktalov: topologiya vyborki. – M.: Universitetskaya kniga, 2005. – 868 s.
- [7] Pererva L.M., Yudin V.V. Fraktal'noye modelirovaniye. Uchebnoye posobiye. pod obshch. red. V.N. Gryanika. – Vladivostok: Izd-vo VGUES, 2007. – 186 s.
- [8] Edgar Gerald. Measure, Topology and Fractal Geometry. 2008 Springer Science+Business Media, LLC. – 293 p.
- [9] Potapov A.A. Fraktaly, Skeyling i drobnnyye operatory v radiotekhnike i elektronike: Sovremennoye sostoyaniye i razvitiye. Zhurnal radioelektroniki. M. 2010. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan10/4/text.html>
- [10] Balkhanov V.K. Osnovy fraktal'noy geometrii i fraktal'nogo ischisleniya. Otv. red. YU.B. Bashkuyev. Ulan-Ude: Izd-vo Buryatskogo gosuniversiteta, 2013. – 224 s.
- [11] Falconer Kenneth. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. 2014 John Wiley & Sons, Ltd. – 400 p.
- [12] Nazirov Sh., Anarova Sh.A., Nuraliev F.M. Fraktallar nazariyasi asoslari. Toshkent-2017, «Navruz» nashriyoti, 128 b.
- [13] Potapov A.A. Fraktaly i drobnnyye operatory kak osnova novykh tekhnologiy obrabotki informatsii i sinteza fraktal'nykh radiosistem. Sb. nauchno-prakticheskoy konf. «Oriyentirovannyye fundamental'nyye issledovaniya – ot sovremennoy nauki k tekhnike budushchego» v ramkakh 10-y yubileyonoy spetsializirovannoy vystavki s mezhdunarodnym uchastiyem «Izdeliya i tekhnologii dvoynogo naznacheniya. Diversifikatsiya OPK» (Rossiya, Moskva, VVTS, pav. № 69, 10-13 noyabrya 2009 g.). Pod red. chlen-kor. RAN B.V. Guseva. M.: Ekspodizayn-Kholding, 2009. C 5.
- [14] Bondarenko B.A. Obobshchennyye treugol'niki i piramidy Paskalya, ikh fraktaly, grafy i prilozheniya. – Tashkent: Fan, 1990. – 192 s.
- [15] Bondarenko B.A. Generalized Pascal Triangles and Pyramids, their Fractals, Graphs, and Applications – USA, Santa Clara: Fibonacci Associations, The Third Edition. 2010. 296 p.
- [16] Nazirov SH.A., Erzhanov M.O. Algebro-logicheskiy metod postroyeniya ob'yektov fraktal'noy geometrii. // Vestnik TUIT. Tashkent, 2014. №1. -C. 21-31.

- [17] Nazirov SH.A., Erzhanov M.O. Primeneniye metoda R-funktsiy v fraktal'noy geometrii. Voprosy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki: Sb.nauch.tr. Tashkent, TSRPPiAPK pri TUIT, 2012. Vyp. 127. S. 51-61.
- [18] Nazirov SH.A., Erzhanov M.O., Tashmukhamedova G.KH., Tuychiyev B.O. Metody postroyeniya uravneniy ob"yektov fraktal'noy geometrii. Voprosy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki. Vyp 130. Tashkent, 2014. -C. 5-21.
- [19] Nazirov SH.A., Erzhanov M.O. Postroyeniye uravneniye determinirovannykh fraktalov. Uzb. zhurnal Problemy informatiki i energetiki. Tashkent, 2014. №1-2. C. 57-65.
- [20] Anarova SH.A., Teshabayev T.Z., Nuraliyev F.M., Abdikarimov S.S. Postroyeniye uravneniy kvadrata spiraleobraznykh fraktalov. Muhammad al-Xorazmiy avlodlari ilmiy-amaliy va axborot tahliliy jurnal. Tashkent – 2019. № 1(7). S. 121-124
- [21] Anarova Sh.A., Nuraliev F.M., Narzulloev O.M. Construction of the equation of fractals structure based on the rvachev r-functions theories. Mechanical Science and Technology Update, IOP Publishing, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1260 (2019) 102002.
- [22] Nuraliev F.M., Anarova Sh.A., Narzulloev O.M. Mathematical and software of fractal structures from combinatorial numbers. International Conference on Information Science and Communications Technologies ICISCT 2019 Applications, Trends and Opportunities 4th, 5th and 6th of November 2019, Tashkent University of Information Technologies TUIT, Tashkent, Uzbekistan.
- [23] Anarova Sh.A., Narzulloev O.M., Ibrohimova Z.E. Fraktal naqshlarni o'zbek milliy gilamlari va jakkard gazlamalarida qo'llash. Muhammad al-Xorazmiy avlodlari ilmiy-amaliy va axborot tahliliy jurnal. Toshkent – 2020. № 1(13). C. 132-137
- [24] Anarova Sh.A., Narzulloev O.M., Ibragimova Z.E. Development of Fractal Equations of National Design Patterns based on the Method of R-Function. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE) ISSN: 2278-3075, Volume-9 Issue-4, February 2020. P. 134-147.
- [25] Rvachev V.L. Metod-funktsiya i yeye nekotoryye primeneniya. Kiyev: Naukova Dumka, 1982. 552 s.
- [26] Kravchenko V.F. Basarab M.A. Resheniye krayevykh adach elektrodinamiki v oblastiakh fraktal'noy geometrii metodom R-funktsiy postroyeniya. ZHTF. Moskva, 2003. T. 29, vyp. 24. S. 89-94.
- [27] Kravchenko V.F., Rvachev V.L. Algebra logiki, atomamyne funktsii i veyvlety v fizicheskikh prilozheniyakh. M.: Fizmatlit, 2006.-416s.
- [28] Maksimenko-Sheyko K.V. R-funktsii v matematicheskom modelirovanii geometricheskikh ob"yektov i fizicheskikh poley. Khar'kov: IPMash NAN Ukraina, 2009. -30 s. [29] Maksimenko Sheyko-K.V., Tolok A.V., Sheyko T.I. R-funktsii kak apparat v prilozheniyakh fraktal'noy geometrii. Prikladnaya informatika. 2010, №6 (30). S. 20-27.
- [30] Maksimenko Sheyko-K.V., Sheyko T.I. R-funktsii v matematicheskom modelirovaniye geometricheskikh ob"yektov v 3D po informatsii v 2D. Vestnik Zaporozheskiy natsional'nyy universitet. 2010, №1. S. 98-104.
- [31] Maksimenko-Sheyko K.V., Tolok A.V., Sheyko T.I. R-funktsii v fraktal'noy geometrii. Informatsionnyye tekhnologii. M.: Izdatel'stvo "Novyye tekhnologii", 2011. № 7. S.24-27.
- [32] Maksimenko Sheyko-K.V., Sheyko T.I. Matematicheskiye modelirovaniye geometricheskikh fraktalov s pomoshch'yu R-funktsiy. Kibernetika i sistemnyy analiz. 2012, №4. S. 155-162.
- [33] Kal'mikov A.V., Kal'mikov L.V., Keshelova A.V. Neskol'ko novykh biopodobnykh L-sistem. MKO-10, 2002, -C.50-63.
- [34] Xiamoni Qi. Fixed Points Fractals, Iterated function systems and Generalized support vector Machines. 2016. – 26 p.
- [35] Singh, D., Singh, M., & Hakimjon, Z. (2019). Geophysical application for splines. In SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology (pp. 55–63). Springer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-981-13-2239-6_7
- [36] KH.N. Zaynidinov, B.R. Azimov Postroyeniye kubicheskogo splayna dlya signalov izmerennykh v neravnykh intervalakh. Avtomatika i programmaya inzheneriya. 2020, №1 (31), g. Novosibirsk, Rossiya, S. 70-76.
- [37] KH.N. Zaynidinov, ZH.U. Zhurayev, M.G. Mannapova Interpolyatsiya funktsiy s pomoshch'yu kusochno-postoyannykh i kusochno-lineynykh veyvletov Khaara. Avtomatika i programmaya inzheneriya. 2020, №1 (31), g. Novosibirsk, Rossiya, S. 42-48.



Shahzoda Amanbaevna Anarova - Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Audiovisual Technologies of the Tashkent University of Information Technologies.

E-mail: shahzodaanarova@gmail.com



Shakhlo Azimbaevna Sadullaeva - First Vice-Rector for Academic Affairs of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khorazmiy, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Multimedia Technologies.

E-mail: sh.sadullaeva@tuit.uz



Zulaykho Ergash kizi Ibrokhimova Assistant, Samarkand branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi.

E-mail: zulayhoibrohimova90@gmail.com

The paper has been received on 03/07/2020.